MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) II - SESSIONE INVERNALE 2016/17

MATR.__________ COGNOME______________ NOME_______________

TEMA C

I PARTE

1) Studiare la funzione:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$$

C.E. $x \in \mathbb{R}/\{\pm 1\}$, la funzione è pari dato che $f(-x) = f(x)$, la studio in $[0,1) \cup (1, +\infty)$ inoltre $f(0) = 4$, $f(2) = 0$

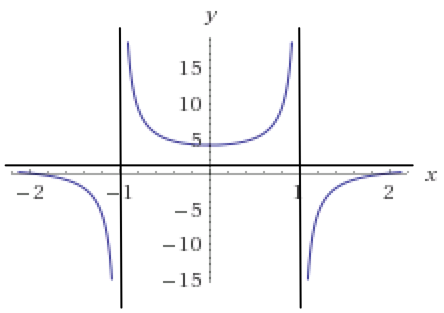
$\lim_{x \to 1^{\mp}} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1} = \pm\infty$ Asintoto Verticale

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1} = 1$ Asintoto Orizzontale

$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - 2x(x^2 - 4)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{6x}{(x^2 - 1)^2} > 0 \; \forall x \in (0,1) \cup (1, +\infty)$,

con $f'(x) = 0$ in $x = 0$ minimo locale data la simmetria della funzione.

Dati gli asintoti orizzontali e verticali e lo studio della derivata non si studia la derivata seconda.



(x from −2.1 to 2.1)

2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(3x)}{5e^{\frac{1}{x}}}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(3x)}{5e^{\frac{1}{x}}} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{3}{3x}}{5e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\frac{x^2}{x}}{5e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \to 0^+} -\frac{x}{5e^{\frac{1}{x}}} = 0$$

Riportare solo i passaggi essenziali

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+1}-x\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x+1-x^2}{\sqrt{x^2+4x+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+1}{\sqrt{x^2+4x+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4+1/x}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{4}{2}=2$$

4) Determinare $a\in\mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua su $\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}a\sqrt{x+4}+2 & \text{se}-4\le x<0\\ \ln(ax+1)+3a & \text{se } x\ge 0\end{cases}$$

$$f(0)=3a=\lim_{x\to0^-}a\sqrt{x+4}+2=2a+2\Rightarrow 2a+2=3a\Rightarrow a=2$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Lagrange alla funzione

$$f(x)=(2x-3)^3$$

nell'intervallo $\left[0,\frac{3}{2}\right]$

$f(x)$ è continua in $\left[0,\frac{3}{2}\right]$, inoltre $f(0)=-27;\quad f\left(\frac{3}{2}\right)=0$

$f'(x)=3(2x-3)^2$ evidentemente derivabile in $\left(0,\frac{3}{2}\right)$

Tutte le ipotesi del teorema sono verificate. Applichiamo la tesi:

$$\frac{0-(-27)}{\frac{3}{2}-0}=3(2x-3)^2\Rightarrow 27\frac{2}{3}=3(2x-3)^2\Rightarrow 18=3(2x-3)^2\Rightarrow(2x-3)^2=6\Rightarrow 2x-3=\mp\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 2x=3\mp\sqrt{3}\Rightarrow x=<\begin{matrix}\frac{3-\sqrt{3}}{2}\cong 0.63 & \text{ACCETTABILE}\\ \frac{3+\sqrt{3}}{2}\cong 2.37 & \text{NON ACCETTABILE}\end{matrix}$$

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_1^e x\log^2 x\ \ dx$$

Si procede per parti

$$\int x\log^2(x)\,dx = \frac{x^2}{2}\log^2(x) - \int \frac{x^2}{2}2\log(x)\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\log^2(x) - \int x\log(x)\ \ dx\ \ =$$

$$= \frac{x^2}{2}\log^2(x) - \left(\frac{x^2}{2}\log(x) - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\ dx\right) = \frac{x^2}{2}\log^2(x) - \frac{x^2}{2}\log(x) + \frac{1}{2}\int xdx\ \ =$$

$$= \frac{x^2}{2}\log^2(x) - \frac{x^2}{2}\log(x) + \frac{x^2}{4} + c$$

da cui

$$\int_1^e x\log^2 x\ \ dx = \left[\frac{x^2}{2}\log^2(x) - \frac{x^2}{2}\log(x) + \frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$$

ponendo $x-1=t \Rightarrow dx=dt$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}}dx = \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = 2\sqrt{t} + c = 2\sqrt{x-1} + c$$

da cui, a causa dell'estremo inferiore di integrazione:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{1+\epsilon}^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[2\sqrt{x-1}\right]_{1+\epsilon}^2 = \lim_{\epsilon\to 0^+} 2 - 2\sqrt{1+\epsilon-1} = \lim_{\epsilon\to 0^+} 2 - 2\sqrt{\epsilon} = 2$$

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{n^3}$$

Applicando il criterio del rapporto si ottiene $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{(n+1)^3} = 1$ da cui $R = 1$ e poiché

$c = 2$ ne consegue che $(1, 3)$ è l'intervallo di convergenza.

Valutiamo il comportamento agli estremi

Se $x = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$ che converge in virtù di Leibniz

Se $x = 3 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ che converge perchè serie armonica generalizzata con $\alpha > 1$

da cui, l'intervallo di convergenza è [1, 3].

9) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 2, centrato su $x = 2$, della seguente funzione:

$$f(x) = \log(x^2)$$

$f(x) = \log(x^2) \Rightarrow f(2) = \log 4$

$f'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x} \Rightarrow f'(2) = 1$

$f''(x) = -\frac{2}{x^2} \Rightarrow f''(2) = -\frac{1}{2}$

E il polinomio risultante è: $P^2(x) = \log 4 + (x-2) - \frac{(x-2)^2}{4}$

Riportare solo i passaggi essenziali

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$ da cui si ottiene:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2y - 2z = 0 \\ 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2y - 1 = 0 \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ y = \dfrac{1}{2} \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{1}{2} \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Soluzione generale $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Riportare solo i passaggi essenziali