MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) II - SESSIONE INVERNALE 2016/17

MATR.__________ COGNOME______________ NOME_______________

TEMA D

I PARTE

1) Studiare la funzione:

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

C.E. $x \in \mathbb{R}/\{0\}$, la funzione non ha simmetrie rispetto l'origine dato

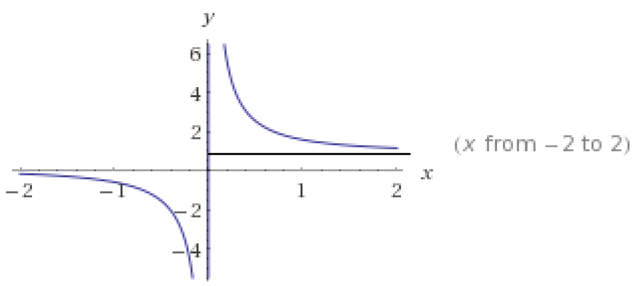
$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x-1} = 0$ Asintoto orizzontale

$\lim\limits_{x\to0^{\mp}} \frac{e^x}{e^x-1} = \mp\infty$ Asintoto verticale

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x-1} = 1$ Asintoto orizzontale

$f'(x) = \frac{e^x(e^x-1) - e^x e^x}{(e^x-1)^2} = -\frac{e^x}{(e^x-1)^2} < 0$ nel suo dominio.

Dati gli asintoti verticali e orizzontali e la derivata prima non si procede allo studio della $f''(x)$



2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to0} \frac{1-\cos^3(x)}{x^3 - x^2}$$

$$\lim_{x\to0} \frac{1-\cos^3(x)}{x^3-x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to0} \frac{-3\cos^2(x)(-\sin(x))}{3x^2-2x} = \lim_{x\to0} \frac{3\cos^2(x)}{3x-2}\frac{\sin x}{x} = -\frac{3}{2}$$

<u>Riportare solo i passaggi essenziali</u>

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{2x}}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{2x}}{x} = \lim_{x\to 0} e^x\frac{1 - e^x}{x} = \lim_{x\to 0} -e^x\frac{e^x - 1}{x} = -1$$

4) Determinare $k \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua su $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} (2-k)x+1 & \text{se } x \leq 0 \\ x-k & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$f(0) = 1 = \lim_{x\to 0^+} x - k = -k \Rightarrow -k = 1 \Rightarrow k = -1$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Lagrange alla funzione

$$f(x) = x^2 - 6x + 9$$

nell'intervallo [3, 6].

$f(x)$ è continua in $[3,6]$, inoltre $f(3) = 0$ ed $f(6) = 9$

$f'(x) = 2x - 6$ evidentemente derivabile in $(3,6)$

Tutte le ipotesi del teorema sono verificate. Applichiamo la tesi:

$$\frac{9-0}{6-3} = 2x - 6 \Rightarrow 3 = 2x - 6 \Rightarrow 2x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{2}$$

Riportare solo i passaggi essenziali

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^1 \tan(x)\, dx$$

$$\int_0^1 \tan(x)\, dx = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\, dx = -\int_0^1 \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\, dx \qquad \text{ponendo } t = \cos(x) \Rightarrow dt = -\sin(x)\, dx$$

si ha che $x = 1 \Rightarrow t = \cos 1$ e $x = 0 \Rightarrow t = 1$

$$\int_0^1 \tan(x)\, dx = -\int_1^{\cos 1} \frac{1}{t}\, dt = [\log|t|]_1^{\cos 1} = -\ln(\cos 1) + \ln 1 = -\ln(\cos 1)$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\, dx$$

poichè

$$\int \frac{\ln(x)}{x^2}\, dx = -\frac{\ln(x)}{x} - \int -\frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + c$$

da cui, a causa dell'estremo superiore di integrazione:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\, dx = \lim_{h\to+\infty} \int_1^h \frac{\ln(x)}{x^2}\, dx = \lim_{h\to+\infty} \left[-\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^h = \lim_{h\to+\infty} -\frac{\ln(h)}{h} - \frac{1}{h} + 0 + 1 = 1$$

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (2^n + 3^n)x^n$$

Applicando il criterio della radicesi si ottiene $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} = \lim_{n\to+\infty} 3 \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1} = 3$

da cui $R = \frac{1}{3}$ e poiché $c = 0$ ne consegue che $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ è l'intervallo di convergenza.

Valutiamo il comportamento agli estremi

Se $x = \frac{1}{3} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2^n + 3^n)}{3^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1$ che diverge perché il termine generale non è infinitesimo

Se $x = -\frac{1}{3} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2^n + 3^n)}{3^n}(-1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right)$ che non converge > 1

da cui, l'intervallo di convergenza è $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

9) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 2, centrato su $x = 1$, della seguente funzione:

$$f(x) = \log(1/x)$$

$f(x) = \log(1/x) \Rightarrow f(1) = \log\left(\frac{1}{1}\right) = -\log 1 = 0$

$f'(x) = -\frac{x}{x^2} = -\frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = -1$

$f''(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(1) = 1$

E il polinomio risultante è: $P^2(x) = -(x-1) + \frac{(x-1)^2}{2}$

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} 2x + y & = -1 \\ x + 8y - 5z & = \ \ 2 \\ x + 5y - 3z & = \ \ 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 8 & -5 & 2 \\ 1 & 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2-R_3]{} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 8 & -5 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2-\frac{R_1}{2}]{} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{15}{2} & -5 & \frac{5}{2} \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3+\frac{2R_2}{5}]{} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{15}{2} & -5 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene:

$$\begin{cases} 2x + y = -1 \\ \frac{15}{2}y - 5z = \frac{5}{2} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = -1 \\ y = \frac{2}{3}z + \frac{1}{3} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{z}{3} - \frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{3}z + \frac{1}{3} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Soluzione generale $\left(-\frac{z}{3} - \frac{2}{3}, \frac{2}{3}z + \frac{1}{3}\ , z\right)$