MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) II - SESSIONE INVERNALE 2016/17

MATR.__________ COGNOME______________ NOME_______________

TEMA E

I PARTE

1) Studiare la funzione:

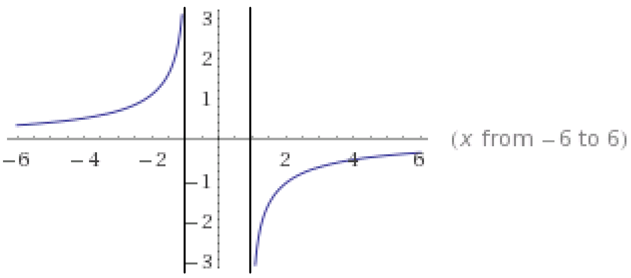
$$f(x) = \log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

C.E. $\frac{x-1}{x+1} > 0 \Rightarrow \; x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, inoltre $f(-x) = \log\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right) = \log\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right) =$
$= \log\left(-\frac{x+1}{-x+1}\right) = \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -f(x)$ si tratta di una funzione dispari
la studiamo in $(1, +\infty)$

$\lim_{x \to 1^+} \log\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\infty$ Asintoto Verticale dx

$\lim_{x \to +\infty} \log\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$ Asintoto Orizzontale

$f'(x) = \frac{x+1}{x-1} \frac{x-1-(x+1)}{(x+1)^2} = -\frac{2}{(x-1)(x+1)} < 0$ per $x > 1$, data la simmetria della funzione la $f'(x)$ e gli asintoti non si procede al calcolo della $f''(x)$



2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log^2(x)}{2x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log^2(x)}{2x} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2\log(x)\frac{1}{x}}{2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Riportare solo i passaggi essenziali

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to-\infty} \log\frac{x^2-5x}{1-x}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \log\frac{x^2-5x}{1-x} = \lim_{x\to-\infty} \log\left(\frac{x}{x}\frac{x-5}{\frac{1}{x}-1}\right) = \lim_{x\to-\infty} \log\left(\frac{x-5}{\frac{1}{x}-1}\right) = \lim_{x\to-\infty} \log\left(-\frac{x-5}{1-\frac{1}{x}}\right) = +\infty$$

4) Determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua su $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{se } x \le 1 \\ \ln(ax) & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$f(1) = 0 = \lim_{x\to 1^+} \ln(ax) = \ln(a) \Rightarrow \ln(a) = 0 \Rightarrow a = 1$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Lagrange alla funzione

$$f(x) = \frac{2}{x}$$

nell'intervallo $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$.

$f(x)$ è continua in $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$, inoltre $f\left(\frac{1}{2}\right) = 4$; $f(2) = 1$

$f'(x) = -\frac{2}{x^2}$ evidentemente derivabile in $(\frac{1}{2}, 2)$

Tutte le ipotesi del teorema sono verificate. Applichiamo la tesi:

$$\frac{1-4}{2-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{x^2} \Rightarrow -\frac{3}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{x^2} \Rightarrow \frac{2}{x^2} = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1 \text{ NON ACCETTABILE e } x = 1 \text{ ACCETTABILE}$$

Riportare solo i passaggi essenziali

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_{-1}^{0} \frac{x^5 - x^4}{x - 1} dx$$

Poiché $\dfrac{x^5 - x^4}{x - 1} = \dfrac{x^4(x-1)}{x - 1} = x^4$

$$\int_{-1}^{0} \frac{x^5 - x^4}{x^2 - 1} dx = \int_{-1}^{0} x^4 \, dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{5}$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$$

ponendo $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$

$$\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx = \int \frac{dt}{1 + t^2} = \arctan t + c = \arctan e^x + c$$

da cui, a causa dell'estremo inferiore di integrazione:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx = \lim_{h \to -\infty} \int_{h}^{0} \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx = \lim_{h \to -\infty} [\arctan e^x]_h^0 =$$

$$= \lim_{h \to -\infty} \arctan e^0 - \arctan e^h = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$$

<u>Riportare solo i passaggi essenziali</u>

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n(2n-1)}$$

Applicando il criterio del rapporto si ottiene $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n(2n-1)}{(2n+2)(2n+1)} = 1$ da cui $R = 1$ e poiché

$c = 0$ ne consegue che $(-1, 1)$ è l'intervallo di convergenza.

Valutiamo il comportamento agli estremi

Se $x = -1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n(2n-1)}$ che converge in virtù di Leibniz

Se $x = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n(2n-1)}$ che converge in quanto è equivalente alla serie armonica

generalizzata con $n = 4 > 1$

da cui, l'intervallo di convergenza è [-1, 1].

9) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 2, centrato su $x = 3$, della seguente funzione:

$$f(x) = \log(4-x)$$

$f(x) = \log(4-x) \Rightarrow f(3) = 0$

$f'(x) = -\frac{1}{4-x} \Rightarrow f'(3) = -1$

$f''(x) = \frac{-1}{(4-x)^2} \Rightarrow f''(3) = -1$

E il polinomio risultante è: $P^2(x) = -(x-3) - \frac{(x-3)^2}{2}$

Riportare solo i passaggi essenziali

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} 2x + y & = 1 \\ x + 2y & = 2 \\ 5x - y & = -1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 - \frac{1}{2}R_1 \\ R_3 - \frac{5}{2}R_1}]{} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\frac{2}{3}R_2 \\ -\frac{2}{7}R_3}]{} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_2]{} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ \quad y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Soluzione generale $(0,1)$

Riportare solo i passaggi essenziali