MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) II - SESSIONE INVERNALE 2016/17

MATR.___________ COGNOME________________ NOME_________________

TEMA F

I PARTE

1) Studiare la funzione:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$$

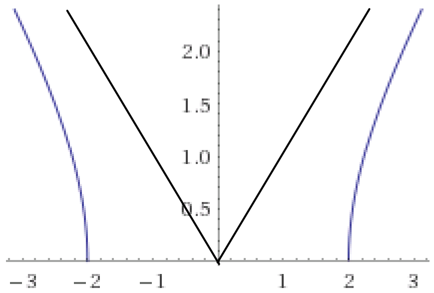
C.E. $x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$, la funzione è pari dato che $f(-x) = f(x)$, la studio in $[2, +\infty)$ inoltre $f(2) = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-4} = +\infty;\ m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2}} = 1; q = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-4} - x =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4+x^2}{\sqrt{x^2-4}+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x^2} = 0 \text{ da cui si evince l'asintoto obliquo } y = x$$

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} \text{ con } Df'(x) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

Si vede subito che per $x > 2 \Rightarrow f'(x) > 0$ inoltre $\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = +\infty$ ossia in 2^+ la $f(x)$ si comporta come una cuspide, possiamo evitare di studiare la $f''(x)$



(x from −3.1 to 3.1)

2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to0} \frac{\log(3x+1)}{x}$$

$$\lim_{x\to0} \frac{\log(3x+1)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to0} \frac{\frac{3}{3x+1}}{1} = \lim_{x\to0} \frac{3}{3x+1} = 3$$

Riportare solo i passaggi essenziali

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{\sqrt{1+x}-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{\sqrt{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{1+x-1}\left(\sqrt{1+x}+1\right)=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{5x}\left(\sqrt{1+x}+1\right)=5\cdot 1\cdot 2=10$$

4) Determinare $a\in\mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua su $\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}x^2+3x+a & \text{se } x\leq 1\\ x & \text{se } x>1\end{cases}$$

$$f(1)=4+a=\lim_{x\to 1^+}x=1\Rightarrow 4+a=1\Rightarrow a=-3$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Rolle alla funzione

$$f(x)=\frac{x}{x^2+4}$$

nell'intervallo [1, 4].

$f(x)$ è continua in $[1,4]$, inoltre $f(1)=\frac{1}{5}=f(4)$

$f'(x)=\frac{x^2+4-x(2x)}{(x^2+4)^2}=\frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}$ evidentemente derivabile in $(1,4)$

Tutte le ipotesi del teorema sono verificate. Applichiamo la tesi:

$f'(x)=0\Rightarrow 4-x^2=0\Rightarrow\ x=+2$ Accettabile e $x=-2$ NON Accettabile

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,dx$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1/x}{\sqrt{1-\ln^2 x}}\,dx \text{ ponendo } \ln(x) = t \Rightarrow \frac{1}{x}dx = dt$$

si ha che $x = 1 \Rightarrow t = 0$ mentre se $x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = -\ln(2)$

$$\int_{-\ln(2)}^{0} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = [\arcsin t]_{-\ln(2)}^{0} = \arcsin 0 - \arcsin(\ln(2)) = -\arcsin(ln(2))$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore (porre $-2x = t$) :

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{2}{e^{2x}}\,dx$$

poichè $-2dx = dt$

$$\int \frac{2}{e^{2x}}\,dx = -\int 2e^{-2x}dt = -\int e^t dt = -e^t + c = -e^{-2x} + c$$

da cui, a causa dell'estremo superiore di integrazione:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{2}{e^{2x}}\,dx = \lim_{h\to+\infty} \int_{0}^{h} \frac{2}{e^{2x}}\,dx = \lim_{h\to+\infty} [-e^{-2x}]_0^h = \lim_{h\to+\infty} -e^{-2h} + e^0 = 1$$

Riportare solo i passaggi essenziali

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n-1)!}$$

Si ricordi che ponendo $t = x^2$ la serie diventa $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{(n-1)!}$

Applicando il criterio del rapporto si ottiene $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n-1)!}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ da cui $R = +\infty$

9) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 2, centrato su $x = 2$, della seguente funzione:

$$f(x) = \log(x^2 - 2)$$

$f(x) = \log(x^2 - 2) \Rightarrow f(2) = \log 2$

$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 2} \Rightarrow f'(2) = 2$

$f''(x) = \frac{2(x^2-2) - 2x2x}{(x^2-2)^2} = \frac{2x^2 - 4 - 4x^2}{(x^2-2)^2} = \frac{-2x^2 - 4}{(x^2-2)^2} \Rightarrow f''(2) = -\frac{12}{4} = -3$

E il polinomio risultante è: $P^2(x) = \log 2 + 2(x-2) - \frac{3(x-2)^2}{2!}$

Riportare solo i passaggi essenziali

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} -x+y+z & = -1 \\ x-y & = -1 \\ x+2y-2z & = \ \ 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3+R_1]{R_2+R_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \downarrow\uparrow R_3]{} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene:

$$\begin{cases} -x+y+z=-1 \\ 3y-z=-1 \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \\ z=-2 \end{cases}$$

Soluzione generale $(-2,-1\,,-2)$