MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) III - SESSIONE AUTUNNALE 2015/16

MATR.___________ COGNOME________________ NOME_________________

TEMA A

I PARTE

---

1) Studiare la funzione:

$$f(x) = \frac{\log(x^2)}{x^2}$$

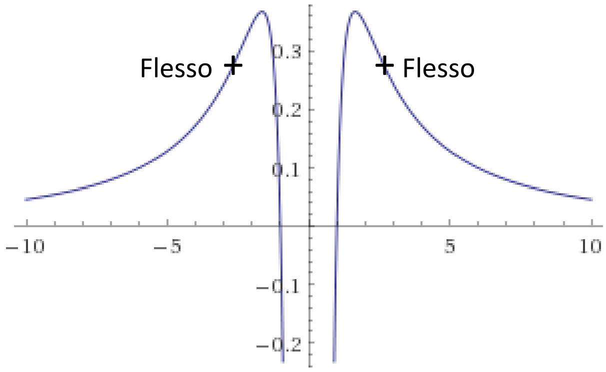
C.E. $x \neq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, la funzione è pari e la studio in $(0, +\infty)$.

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x^2)}{x^2} = -\infty$; asintoto verticale dx

$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(x^2)}{x^2} = 0$ per gli ordini di infinito. As. orizzontale dx

$f'(x) = \frac{\frac{1}{x^2}(2x)x^2 - (2x)\ln(x^2)}{x^4} = \frac{2x - 2x\ln(x^2)}{x^4} = \frac{2 - 2\,ln(x^2)}{x^3}$ da cui per $x > 0$ si evince che $2 - 2\ln(x^2) \geq 0 \Rightarrow 1 - \ln(x^2) \geq 0 \Rightarrow \ln(x^2) \leq 1 \Rightarrow x^2 \leq e \Rightarrow -\sqrt{e} \leq x \leq \sqrt{e} \cap x > 0$ ossia la funzione cresce in $(0, \sqrt{e})$ e decresce in $(\sqrt{e}, +\infty)$ con massimo relativo (e assoluto) in $\left(\sqrt{e}, \frac{1}{e}\right)$.

Non si procede al calcolo della derivata seconda essendo evidente un punto di flesso dopo $x = \sqrt{e}$.



2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{x}}{x - 2}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{x}}{x - 2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 2} \frac{-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{1} = \lim_{x\to 2} -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = -\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$$

Riportare solo i passaggi essenziali

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\,(1+\sin(x))}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\,(1+\sin(x))}{x}=\lim_{x\to 0}\ln\,(1+\sin(x))^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\ln\left[(1+\sin(x))^{\frac{1}{\sin(x)}}\right]^{\frac{\sin(x)}{x}}=1$$

4) Determinare $k\in\mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua in $x=1$

$$f(x)=\begin{cases} e^{x} & \text{se } x\geq 1\\ \log k & \text{se } 0<x<1\end{cases}$$

$$f(1)=e=\lim_{x\to 1^{-}}\log k=\log k\Rightarrow e=\log k\Rightarrow k=e^{e}$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Rolle alla funzione

$$f(x)=e^{|x|}$$

nell'intervallo [-1,1].

$f(x)$ è continua in $[-1,1]$ man non è derivabile in $(-1,1)$ dato che $f'(x)=\dfrac{|x|}{x}\,e^{|x|}$ e inoltre

$$\lim_{x\to 0^{\mp}}\frac{|x|}{x}\,e^{|x|}=\mp e$$

ossia non vale il teorema di Rolle nell'intervallo [-1,1].

Riportare solo i passaggi essenziali

II PARTE

6) Ricordando che $D(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^1 \arccos x \, dx$$

$$\int \arccos x \, dx = x \arccos x - \int -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arccos x - \int -\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$= x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + c$ da cui

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \left[x \arccos x - \sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = 1 \arccos 1 - \sqrt{1-1} - 0 \arccos 0 + \sqrt{1-0} = 1 \cdot 0 + 1 = 1$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^e} dx$$

$$\int \frac{1}{x^e} dx = \int x^{-e} dx = \frac{x^{1-e}}{1-e} + c \quad \text{da cui si ottiene:}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^e} dx = \lim_{h \to +\infty} \int_1^h \frac{1}{x^e} dx = \lim_{h \to +\infty} \left[\frac{x^{1-e}}{1-e}\right]_1^h = \lim_{h \to +\infty} \frac{h^{\overbrace{1-e}^{<0}}}{1-e} - \frac{1^{1-e}}{1-e} = -\frac{1}{1-e} = \frac{1}{e-1}$$

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(x-2)^n}{2^n+1}$$

Il centro della serie è c = 2. Analizziamo il termine generale della serie, con il criterio della radice:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} \sqrt[n]{\frac{n}{1+\frac{1}{2^n}}} = \frac{1}{2} \quad \text{converge con } R = 2 \ e \ c = 2$$

quindi l'intervallo di convergenza è tutto $(0,4)$. Agli estremi non converge dato che per

$x = 0)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n\, 2^n}{2^n+1}$ è indeterminato dato che il termine generale è divergente

$x = 4)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\, 2^n}{2^n+1}$ ha termine generale divergente

ossia l'intervallo di convergenza è (0, 4)

9) Calcolare il polinomio di Mc Laurin di ordine 2 della seguente funzione:

$$f(x) = \arctan x$$

$f(x) = \arctan x \Rightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \Rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f''(0) = 0$

E il polinomio risultante è: $P^2(x) = x$

Riportare solo i passaggi essenziali

10) Studiare il seguente sistema lineare omogeneo, trovando, le soluzioni:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 3x + y + 4z = 0 \\ 4x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\widetilde{r_2}=r_2-3r_1 \\ \widetilde{r_3}=r_3-4r_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow[\widetilde{r_3}=r_3-r_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \text{ sistema omogeneo di grado 3}$$

da cui

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ \quad -5y - 5z = 0 \\ \qquad\quad z = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ammette l'unica soluzione } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$