MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) III - SESSIONE AUTUNNALE 2015/16

MATR.___________ COGNOME________________ NOME________________

TEMA B

I PARTE

1) Studiare la funzione:

$$f(x) = \frac{x^2}{\log(x^2)}$$

C.E. $x \neq 0 \wedge \log(x^2) \neq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \mp 1\}$, la funzione è pari la studio in $(0,1) \cup (1, +\infty)$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2}{\log(x^2)} = 0^-$ no asintoto verticale dx; $\lim\limits_{x\to 1^\mp} \frac{x^2}{\log(x^2)} = \mp\infty$ asintoto verticale sx e dx

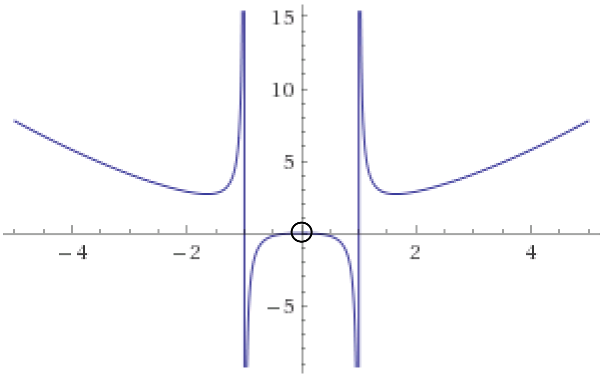
$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2}{\log(x^2)} = +\infty$; No as. oriz. no as. obliquo

$f'(x) = \frac{2x\ln(x^2) - x^2 \frac{1}{x^2} 2x}{\ln^2(x^2)} = \frac{2x(\ln(x^2) - 1)}{\ln^2(x^2)} \geq 0$, per $x > 0 \ \cap \ln(x^2) - 1 \geq 0 \Rightarrow \ln(x^2) \geq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 \geq e \Rightarrow x \leq -\sqrt{e} \vee x \geq \sqrt{e} \cap x > 0 \Rightarrow f(x)$ cresce in $(\sqrt{e}, +\infty)$ e decresce in $(0,1) \vee (1, \sqrt{e})$

con minimo relativo in $(\sqrt{e}, e)$

inoltre $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2x(\ln(x^2) - 1)}{\ln^2(x^2)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{2x}{\ln^2(x^2)} = 0$, non si procede allo studio della $f''(x)$



2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{3x + \log x}{2x^2 + 1}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{3x + \log x}{2x^2 + 1} \overset{H}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{4x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{3x + 1}{4x^2} = 0$$

Riportare solo i passaggi essenziali

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{x} = \lim_{x \to 0} x \frac{\sin(x^2)}{x^2} = 1 \times 0 = 0$$

4) Determinare $k \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua su $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} e^{kx} & \text{se } x < 1 \\ e^{k^2 x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(1) = e^{k^2} = \lim_{x \to 1^-} e^{kx} = e^k \Rightarrow e^{k^2} = e^k \Rightarrow k^2 = k \Rightarrow k^2 - k = 0 \Rightarrow k(k-1) = 0 \Rightarrow k = 0 \ \vee k = 1$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Rolle alla funzione

$$f(x) = e^{x^2 - 3x}$$

nell'intervallo [0, 3].

$f(x)$ è continua in $[0, 3]$, inoltre $f(0) = 1 = f(3)$

$f'(x) = (2x - 3)e^{x^2 - 3x}$ evidentemente derivabile in $(0, 3)$

Tutte le ipotesi del teorema sono verificate. Applichiamo la tesi:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

Riportare solo i passaggi essenziali

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^2 \frac{e^x}{e^x+1}dx$$

Ponendo $e^x+1=t \Rightarrow e^x dx = dt$

si ha che $x=2 \Rightarrow t=e^2+1$ e $x=0 \Rightarrow t=2$

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}dx = \int \frac{1}{t}dt = \log|t| + c$$

da cui

$$\int_0^2 \frac{e^x}{e^x+1}dx = [\log|t|]_2^{e^2+1} = \log(e^2+1) - \log 2 = \log\frac{e^2+1}{2}$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$$

poichè

$$\int xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int 2xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(-e^{-x^2}\right) + c$$

da cui, a causa dell'estremo superiore di integrazione:

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{h\to+\infty}\int_0^h xe^{-x^2}dx = \lim_{h\to+\infty}\frac{1}{2}\left[-e^{-x^2}\right]_0^h = \frac{1}{2}\lim_{h\to+\infty}\left(-\frac{1}{e^{h^2}} + e^0\right) = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}$$

Riportare solo i passaggi essenziali

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-3)^n}{n^3}$$

Applicando il criterio del rapporto si ottiene $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{(n+1)^3} = 1$ da cui $R = 1$ e poiché

$c = 3$ ne consegue che $(2,4)$ è l'intervallo di convergenza.

Valutiamo il comportamento agli estremi

Se $x = 2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$ che converge in virtù di Leibniz

Se $x = 4 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ che converge perchè serie armonica generalizzata con $\alpha > 1$

da cui, l'intervallo di convergenza è [2, 4].

9) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 2, centrato su $x = 2$, della seguente funzione:

$$f(x) = \log(x^2 - 2)$$

$f(x) = \log(x^2 - 2) \Rightarrow f(2) = \log 2$

$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 2} \Rightarrow f'(2) = 2$

$f''(x) = \frac{2(x^2-2) - 2x2x}{(x^2-2)^2} = \frac{2x^2 - 4 - 4x^2}{(x^2-2)^2} = \frac{-2x^2 - 4}{(x^2-2)^2} \Rightarrow f''(2) = -\frac{12}{4} = -3$

E il polinomio risultante è: $P^2(x) = \log 2 + 2(x-2) - \frac{3(x-2)^2}{2!}$

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4-2R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ da cui si ottiene}$$

$$\begin{cases} x - y + \quad z = 1 \\ \quad 2y - 2z = 0 \\ \qquad\quad 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = z = \dfrac{1}{2} \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{Soluzione generale } \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

Riportare solo i passaggi essenziali