MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) SESSIONE PRIMAVERILE 2016/17

MATR.__________ COGNOME______________ NOME_______________

TEMA A

I PARTE

1) Studiare la funzione:

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^4+1}$$

C.E. $x \in \mathbb{R}$, la funzione è pari e la studio in $[0,+\infty)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^4+1} = 0 \quad \text{As. orizzontale dx, inoltre } f(0) = 0$

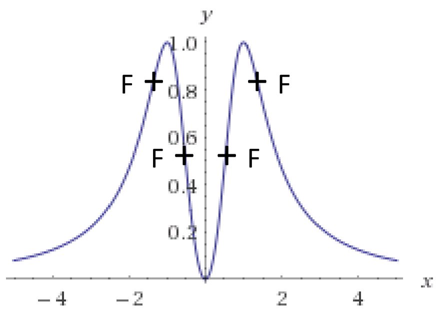
$f'(x) = \frac{4x(x^4+1) - 2x^2(4x^3)}{(x^4+1)^2} = \frac{4x^5+4x-8x^5}{(x^4+1)^2} = \frac{-4x^5+4x}{(x^4+1)^2} = -4x\frac{x^4-1}{(x^4+1)^2} \geq 0$

$-4x \geq 0 \; per \; x \leq 0$

$x^4 - 1 \geq 0 \Rightarrow (x^2-1)(x^2+1) \geq 0 \Rightarrow (x-1)(x+1)(x^2+1) \geq 0 \Rightarrow x \leq -1 \vee x \geq 1$

che combinata alla precedente indica $f'(x) \geq 0$ per $-1 \leq x \leq 1 \cap x \geq 0$ (per la parità)ossia cresce in $[0,1)$ e decresce in $[1,+\infty)$ con $f'(x) = 0 \; in \; x_1 = 0$ e $x_2 = 1$ da cui $\max(1,1)$ e $\min(0,0)$.

Non si procede al calcolo della derivata seconda, avendo univocamente determinato la presenza dei flessi



(x from −5 to 5)

2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to2} \frac{\sin(x-2)}{x^2-2x}$$

$$\lim_{x\to2} \frac{\sin(x-2)}{x^2-2x} \overset{H}{=} \lim_{x\to2} \frac{\cos(x-2)}{2x-2} = \frac{1}{4-2} = \frac{1}{2}$$

Riportare solo i passaggi essenziali

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)-\sin x}{\log(1+x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)-\sin x}{\log(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(3x)}{x}-\frac{\sin x}{x}}{\frac{\log(1+x)}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{3\frac{\sin(3x)}{3x}-\frac{\sin x}{x}}{\frac{\log(1+x)}{x}}=\frac{3-1}{1}=2$$

4) Determinare $k\in\mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua in $x=2$

$$f(x)=\begin{cases} e^x & \text{se } x\geq 2 \\ k^2 & \text{se } 0<x<2 \end{cases}$$

$$f(2)=e^2=\lim_{x\to 2^-}k^2=k^2\Rightarrow e^2=k^2\Rightarrow k=\mp e$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Lagrange alla funzione

$$f(x)=e^{x^2}$$

nell'intervallo [-1,1].

$f(x)$ è continua in $[-1,1]$ ed è derivabile in $(-1,1)$ dato che $f'(x)=2xe^{x^2}$ e quindi

$\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{e-e}{2}=0=2xe^{x^2}$ da cui l'unicasoluzione possibile è $x=0$

Riportare solo i passaggi essenziali

II PARTE

6) Considerando $a > 0$, calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^a \left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2 dx$$

$$\int \left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2 dx = \int (a-2\sqrt{ax}+x)dx = \int (a-2\sqrt{a}x^{\frac{1}{2}}+x)dx = ax - \frac{2\sqrt{a}x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^2}{2} + c$$

$$= ax - \frac{4}{3}\sqrt{a}x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} + c = ax - \frac{4}{3}x\sqrt{ax} + \frac{x^2}{2} + c$$

da cui

$$\int_0^a \left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2 dx = \left[ax - \frac{4}{3}x\sqrt{ax} + \frac{x^2}{2}\right]_0^a = a^2 - \frac{4}{3}a^2 + \frac{a^2}{2} - 0 = \frac{6-8+3}{6}a^2 = \frac{a^2}{6}$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$$

$\int e^{-x}dx = -e^{-x} + c$ da cui si ottiene:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{h\to+\infty} \int_0^h e^{-x} dx = \lim_{h\to+\infty} [-e^{-x}]_0^h = \lim_{h\to+\infty} -e^{-h} + e^0 = 1$$

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{2^n+1}$$

Il centro della serie è *c* = 1. Analizziamo il termine generale della serie, con il criterio della radice:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} \sqrt[n]{\frac{1}{1+\frac{1}{2^n}}} = \frac{1}{2} \text{ converge con } R = 2 \; e \; c = 1$$

quindi l'intervallo di convergenza è tutto $(-1,3)$. Agli estremi non converge dato che per

$x = -1)$ $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n}{2^n+1}$ è indeterminato dato che il termine generale è divergente

$x = 3)$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{2^n+1}$ ha termine generale non infinitesimo e quindi la serie diverge

ossia l'intervallo di convergenza è (-1, 3)

9) Calcolare il polinomio di Mc Laurin di ordine 2 della seguente funzione:

$$f(x) = e^{x^2}$$

$f(x) = e^{x^2} \Rightarrow f(0) = 1$

$f'(x) = 2xe^{x^2} \Rightarrow f'(0) = 0$

$f''(x) = 2e^{x^2} + 2x(2x)e^{x^2} = 2e^{x^2}(1+2x^2) \Rightarrow f''(0) = 2$

E il polinomio risultante è: $P^2(x) = x + \frac{2x^2}{2} = x + x^2$

Riportare solo i passaggi essenziali

10) Studiare il seguente sistema lineare, trovando, le soluzioni:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 3x + y + 4z = 2 \\ 4x + 3y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\widetilde{r_2}=r_2-3r_1 \\ \widetilde{r_3}=r_3-4r_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & -1 \\ 0 & -5 & -10 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\widetilde{r_3}=r_3-r_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right) \text{ sistema di grado 3}$$

da cui

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ \quad -5y - 5z = -1 \\ \qquad\qquad z = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ammette l'unica soluzione} \begin{cases} x = \dfrac{3}{5} \\ y = \dfrac{1}{5} \\ z = 0 \end{cases}$$

Riportare solo i passaggi essenziali