MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) SESSIONE PRIMAVERILE 2016/17

MATR.__________ COGNOME_______________ NOME________________

TEMA B

I PARTE

---

1) Studiare la funzione:

$$f(x) = \frac{3x}{x^2+3}$$

C.E. $x \in \mathbb{R}$, la funzione è dispari la studio in $[0, +\infty)$.

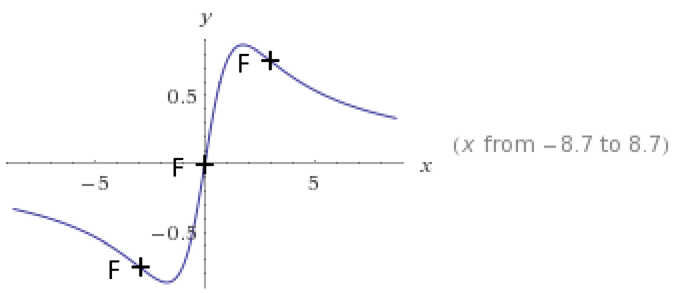
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x}{x^2+3} = 0$; As. orizzontale dx

$f'(x) = \frac{3(x^2+3)-3x(2x)}{(x^2+3)^2} = \frac{3x^2+9-6x^2}{(x^2+3)^2} = \frac{-3x^2+9}{(x^2+3)^2} \geq 0 \Rightarrow -3x^2+9 \geq 0 \Rightarrow 3x^2 \leq 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 \leq 3 \Rightarrow -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} \cap x > 0 \Rightarrow f(x)$ cresce in $(0, \sqrt{3})$ e decresce in $(\sqrt{3}, +\infty)$

con massimo relativo in $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Non si procede allo studio della $f''(x)$ considerando che $x = 0$ è punto di flesso data la simmetria dispari della funzione e che un altro punto di flesso è subito dopo il massimo



2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x^2}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x^2}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x}{x^2}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$$

Riportare solo i passaggi essenziali

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x + 2\cos x}{3x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x + 2\cos x}{3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{3x} + \frac{2}{3}\,\frac{cosx}{x} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 0 = \frac{1}{3}$$

4) Determinare $k \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua su $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} e^{kx} & \text{se } x < 2 \\ e^{k^2 x} & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

$$f(2) = e^{2k^2} = \lim_{x\to 2^-} e^{kx} = e^{2k} \Rightarrow e^{2k^2} = e^{2k} \Rightarrow 2k^2 = 2k \Rightarrow k^2 - k = 0 \Rightarrow k(k-1) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow k = 0 \;\vee k = 1$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Lagrange alla funzione

$$f(x) = \log\,(2x + 2)$$

nell'intervallo [0, 2].

$f(x)$ è continua in $[0, 2]$

$f'(x) = \dfrac{2}{2x+2} = \dfrac{1}{x+1}$ evidentemente derivabile in $(0, 2)$

Tutte le ipotesi del teorema sono verificate. Applichiamo la tesi:

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{\log 6 - \log 2}{2} = \frac{\log\left(\frac{6}{2}\right)}{2} = \frac{\log(3)}{2} = \frac{1}{x+1} \text{dato che } x + 1 > 0 \text{ in } (0,2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 1 = \frac{2}{\log 3} \Rightarrow x = \frac{2}{\log 3} - 1 \;\Rightarrow x = \frac{2 - \log 3}{\log 3}$$

<u>Riportare solo i passaggi essenziali</u>

II PARTE

6) Considerando $a > 0$, calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^a (a^2x - x^3)dx$$

$$\int_0^a (a^2x - x^3)dx = \frac{a^2x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + c$$

da cui

$$\int_0^a (a^2x - x^3)dx = \left[\frac{a^2x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^a = \frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4} = \frac{a^4}{4}$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$$

poichè

$$\int xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int 2xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(-e^{-x^2}\right) + c$$

da cui, a causa dell'estremo superiore di integrazione:

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{h\to+\infty}\int_0^h xe^{-x^2}dx = \lim_{h\to+\infty}\frac{1}{2}\left[-e^{-x^2}\right]_0^h = \frac{1}{2}\lim_{h\to+\infty}\left(-\frac{1}{e^{h^2}} + e^0\right) = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}$$

Riportare solo i passaggi essenziali

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{n^4}$$

Applicando il criterio del rapporto si ottiene $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^4}{(n+1)^4} = 1$ da cui $R = 1$ e poiché

$c = 2$ ne consegue che $(1, 3)$ è l'intervallo di convergenza.

Valutiamo il comportamento agli estremi

Se $x = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}$ che converge in virtù di Leibniz

Se $x = 3 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ che converge perchè serie armonica generalizzata con $\alpha > 1$

da cui, l'intervallo di convergenza è [1, 3].

9) Calcolare il polinomio di Mc Laurin di ordine 2 della seguente funzione:

$$f(x) = e^{-x}$$

$f(x) = e^{-x} \Rightarrow f(0) = 1$

$f'(x) = -e^{-x} \Rightarrow f'(0) = -1$

$f''(x) = e^{-x} \Rightarrow f''(0) = 1$

E il polinomio risultante è: $P^2(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2}$

Riportare solo i passaggi essenziali

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \text{ da cui si ottiene}$$

$$\begin{cases} x - y + \quad z = 2 \\ \qquad 2y - 2z = -1 \\ \qquad\qquad 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3/2 \\ y = 0 \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{Soluzione generale } \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

Riportare solo i passaggi essenziali