MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) I SESSIONE ESTIVA 2016/17

MATR.___________ COGNOME________________ NOME_________________

TEMA A

I PARTE

1) Studiare la funzione:

$$f(x) = \log(x^2 - 1)$$

C.E. $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ la funzione è pari, si studia in $(1, +\infty)$

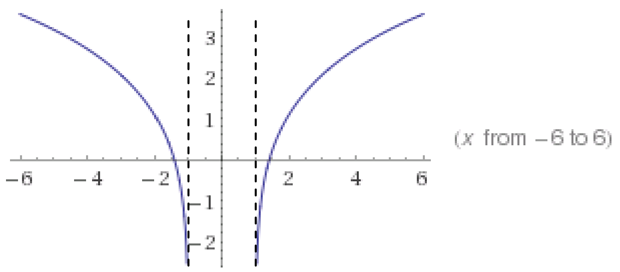
$\lim_{x\to 1^+} \log(x^2 - 1) = -\infty$; asintoto verticale dx;

$\lim_{x\to +\infty} \log(x^2 - 1) = +\infty$; $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\log(x^2 - 1)}{x} = 0$; No asintoto orizzontale, no asintoto obliquo

$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1} \geq 0 \Rightarrow x > 0 \cap (1 + \infty) \Rightarrow x > 1 \Rightarrow f(x)$ cresce in $(1, +\infty)$

$f''(x) = \dfrac{2(x^2 - 1) - 2x2x}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{2x^2 - 2 - 4x^2}{(x^2 - 1)^2} = -\dfrac{2x^2 + 2}{(x^2 - 1)^2} < 0$ in $(1, +\infty)$

ossia rivolge la concavità verso il basso. Tenendo conto della simmetria il grafico è:



2) Calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log^2 x}{x}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log^2 x}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{2\log x}{x}}{1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2\log x}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

<u>Riportare solo i passaggi essenziali</u>

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x-3}{x^2-9}\right)^x$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x-3}{x^2-9}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x+3}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x+3}\right)^{x+3}\right]^{\frac{x}{x+3}} = e$$

4) Determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua su $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax}{2} & \text{se } x < 2 \\ a^2(x-1) & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

$$f(2) = a^2 = \lim_{x\to 2^-}\frac{ax}{2} = a \Rightarrow a^2 - a = 0 \Rightarrow a(a-1) = 0 \Rightarrow a = 0 \vee a = 1$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Rolle alla funzione

$$f(x) = e^{x^2}$$

nell'intervallo [-1, 1].

$f(x)$ è continua in $[-1,1]$

$f'(x) = 2xe^{x^2}$ evidentemente derivabile in $(-1,1)$

Tutte le ipotesi del teorema sono verificate. Applichiamo la tesi:

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2xe^{x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$

Riportare solo i passaggi essenziali

II PARTE

6) Considerando $a > 0$, calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^a (a^2x - ax^2)dx$$

$$\int_0^a (a^2x - ax^2)dx = \frac{a^2x^2}{2} - \frac{ax^3}{3} + c$$

da cui

$$\int_0^a (a^2x - ax^2)dx = \left[\frac{a^2x^2}{2} - \frac{ax^3}{3}\right]_0^a = \frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{3} = \frac{3a^4 - 2a^4}{6} = \frac{a^4}{6}$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$$

ponendo $x - 1 = t \Rightarrow dx = dt$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}}dx = \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = 2\sqrt{t} + c = 2\sqrt{x-1} + c$$

da cui, a causa dell'estremo inferiore di integrazione:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{1+\epsilon}^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \left[2\sqrt{x-1}\right]_{1+\epsilon}^2 = \lim_{\epsilon\to 0^+} 2 - 2\sqrt{1+\epsilon-1} = \lim_{\epsilon\to 0^+} 2 - 2\sqrt{\epsilon} = 2$$

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^n$$

Applicando il criterio della radice si ottiene $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{n} = 1$ da cui $R = 1$ e poiché

$c = 0$ ne consegue che $(-1, 1)$ è l'intervallo di convergenza.

Valutiamo il comportamento agli estremi

Se $x = -1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ che non converge

Se $x = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ che diverge perchè il termine generale converge al valore e

da cui, l'intervallo di convergenza è (-1, 1).

9) Calcolare il polinomio di Mc Laurin di ordine 2 della seguente funzione:

$$f(x) = \sin x^2$$

$f(x) = \sin x^2 \Rightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = 2x \cos x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$

$f''(x) = 2\cos x^2 - 4x^2 \sin x^2 \Rightarrow f''(0) = 2$

E il polinomio risultante è: $P^2(x) = \dfrac{2x^2}{2!} = x^2$

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y - z = 1 \\ 2y - 2z = -1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ da cui si ottiene}$$

$$\begin{cases} x - y + \quad z = 2 \\ 2y - 2z = -1 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \dfrac{2z-1}{2} + z = 2 \\ y = \dfrac{2z-1}{2} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2z + 1 + 2z = 4 \\ y = \dfrac{2z-1}{2} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{2z-1}{2} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Soluzione generale $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{2z-1}{2}, z\right), z \in \mathbb{R}$

Riportare solo i passaggi essenziali