MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) II SESSIONE ESTIVA 2016/17

MATR.__________ COGNOME______________ NOME _______________

TEMA A

I PARTE

---

1) Studiare la funzione, senza utilizzare la derivata seconda:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$$

C.E. $x \in \mathbb{R}$ la funzione è pari, si studia in $[0, +\infty)$

$f(0) = -1;$

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^2-1} = +\infty;\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x} = 0;$ No obliquo

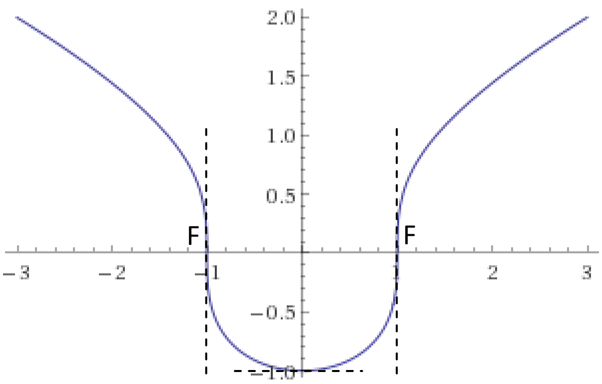
$f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$ con dominio in $[0,1) \cup (1,+\infty)$

$f'(x) > 0$ per $x > 0;$ $f'(x) < 0$ per $x < 0;$

$f(x) = 0$ per $x = 0$ tenendo conto del dominio complessivo di $f(x)$

$\lim_{x\to 1^{\mp}} \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} = +\infty$ ossia è presente un flesso ascendente a tangente verticale

Tenendo conto della simmetria e dei dati ricavati il grafico è:



2) Calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos x^2}{1} = 2 \times 0 \times 1 = 0$$

<u>Riportare solo i passaggi essenziali</u>

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{x^2-1}$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

4) Determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua su $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2a} & \text{se } x < 2 \\ a(x-1) & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Evidentemente deve essere $a \neq 0$:

$$f(2) = a = \lim_{x \to 2^-} \frac{x}{2a} = \frac{1}{a} \Rightarrow a - \frac{1}{a} = 0 \Rightarrow \frac{a^2-1}{a} = 0 \Rightarrow a = -1 \vee a = 1$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Lagrange alla funzione

$$f(x) = x^3$$

nell'intervallo [-1, 1].

$f(x)$ è continua in $[-1, 1]$

$f'(x) = 3x^2$ evidentemente derivabile in $(-1, 1)$

Tutte le ipotesi del teorema sono verificate. Applichiamo la tesi:

$$\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = 3x^2 \Rightarrow \frac{2}{2} = 3x^2 \Rightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \mp \frac{1}{\sqrt{3}}$$

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, e^{\cos x} dx$$

Considerando che la derivata di $\cos x$ è $-\sin x$ allora

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, e^{\cos x} dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin x\, e^{\cos x} dx = -[e^{\cos x}]_0^{\frac{\pi}{2}} = -e^{\cos\frac{\pi}{2}} + e^{\cos 0} = -e^0 + e = e - 1$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx$$

poiché in $(0,1]$ il $|x|$ ha argomento positivo evidentemente $|x| = x$

$$\int \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = 2\sqrt{x} + c$$

da cui, a causa dell'estremo inferiore di integrazione:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{0+\epsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[2\sqrt{x}\right]_{0+\epsilon}^1 = \lim_{\epsilon \to 0^+} 2 - 2\sqrt{\epsilon} = 2$$

Riportare solo i passaggi essenziali

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

Applicando il criterio del rapporto (in valore assoluto) si ottiene $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

da cui $R = +\infty$

9) Calcolare il polinomio di Mc Laurin di ordine 2 della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{1}{2x-3}$$

$$f(x) = \frac{1}{2x-3} \Rightarrow f(0) = -\frac{1}{3}$$

$$f'(x) = -\frac{2}{(2x-3)^2} \Rightarrow f'(0) = -\frac{2}{9}$$

$$f''(x) = \frac{8(2x-3)}{(2x-3)^4} = \frac{8}{(2x-3)^3} \Rightarrow f''(0) = -\frac{8}{27}$$

E il polinomio risultante è: $P^2(x) = -\frac{1}{3} - \frac{2}{9}x - \frac{8}{27}\frac{x^2}{2} = -\frac{1}{3} - \frac{2}{9}x - \frac{4}{27}x^2$

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x \ +z = 1 \\ y - z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ da cui si ottiene}$$

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - z \\ y = z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

Soluzione generale $(1 - z, z, z\ ), z \in \mathbb{R}$

Riportare solo i passaggi essenziali