MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) III SESSIONE ESTIVA 2016/17

MATR.__________ COGNOME______________ NOME_______________

TEMA A

I PARTE

1) Studiare la funzione, senza utilizzare la derivata seconda:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$$

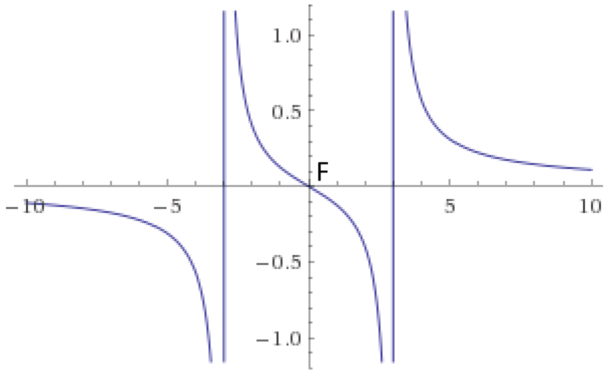
C.E. $x \in \mathbb{R} - \{\mp 3\}$, la funzione è dispari, si studia in $[0,3) \cup (3, +\infty)$

$f(0) = 0;$

$\lim_{x \to 3^{\mp}} \frac{x}{x^2 - 9} = \mp\infty$; $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 - 9} = 0$; Asintoto orizzontale

$f'(x) = \frac{x^2 - 9 - 2x^2}{(x^2 - 9)^2} = -\frac{x^2 + 9}{(x^2 - 9)^2} < 0$ nel sub − dominio $(0,3) \cup (3, +\infty)$ e quindi decrescente

Tenendo conto della simmetria e dei dati ricavati il grafico è:



2) Calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x \to \sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{\cos x^2}{x^2 - \frac{\pi}{2}}$$

$$\lim_{x \to \sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{\cos x^2}{x^2 - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \to \sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{-2x \sin x^2}{2x} = \lim_{x \to \sqrt{\frac{\pi}{2}}} -\sin x^2 = -1$$

Riportare solo i passaggi essenziali

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x^3)}{x^6}$$

Se $t=x^3$ per $x\to 0 \Rightarrow\ t\to 0$ da cui $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x^3)}{x^6}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos(t)}{t^2}=\frac{1}{2}$

4) Determinare $a\in\mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua su $\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}\ln(a)x & \text{se } x<2\\ a(x-2) & \text{se } x\geq 2\end{cases}$$

Evidentemente deve essere $a>0$:
$f(2)=0=\lim_{x\to 2^-}\ln(a)x=2\ln(a)\Rightarrow 2\ln(a)=0\Rightarrow \ln(a)=0\Rightarrow a=1$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Rolle alla funzione

$$f(x)=\sqrt{3x-x^2}$$

nell'intervallo $[0,3]$

Poiché $3x-x^2\geq 0$ per $0\leq x\leq 3\Rightarrow f(x)$ è continua in $[0,3]$, inoltre $f(0)=f(3)=0$

$f'(x)=\frac{3-2x}{2\sqrt{3x-x^2}}$ derivabile in $(0,3)$

Tutte le ipotesi del teorema sono verificate. Applichiamo la tesi:

$\frac{3-2x}{2\sqrt{3x-x^2}}=0\Rightarrow 3-2x=0\Rightarrow x=\frac{3}{2}$

Riportare solo i passaggi essenziali

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, e^{\sin x} dx$$

Considerando che la derivata di $\sin x$ è $\cos x$ allora

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, e^{\sin x} dx = \left[e^{\sin x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = e^{\sin\frac{\pi}{2}} - e^{\sin 0} = e - 1$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx$$

poiché in $[-1,0)$il $|x|$ ha argomento negativo evidentemente $|x| = -x$

$$\int \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{-x}} dx = -\frac{(-x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = -2\sqrt{-x} + c$$

da cui, a causa dell'estremo superiore di integrazione:

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = \lim_{\epsilon \to 0^-} \int_{-1}^{0+\epsilon} \frac{1}{\sqrt{-x}} dx = \lim_{\epsilon \to 0^-} \left[-2\sqrt{-x}\right]_{-1}^{0+\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0^-} -2\sqrt{-\epsilon} + 2 = 2$$

Riportare solo i passaggi essenziali

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-2)^n e^n}{n!}$$

Il centro $c = 2$. Applicando il criterio del rapporto: $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{e^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{ee^n}{e^n} \frac{n!}{(n+1)n!} =$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{e}{n+1} = 0\,, \qquad \text{da cui } R = +\infty$$

9) Calcolare il polinomio di Mc Laurin di ordine 2 della seguente funzione:

$$f(x) = \ln(x^2+1) - e^x$$

$f(x) = \ln(x^2+1) - e^x \Rightarrow f(0) = -1$

$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - e^x \Rightarrow f'(0) = -1$

$f''(x) = \frac{2(x^2+1) - 4x^2}{(x^2+1)^2} - e^x = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} - e^x \Rightarrow f''(0) = +2 - 1 = 1$

E il polinomio risultante è: $P^2(x) = -1 - x - \frac{1}{2}x^2$

Riportare solo i passaggi essenziali

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x \ + z = 1 \\ y - z = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ da cui si evince che il sistema è incompatibile.

Riportare solo i passaggi essenziali