MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) I - SESSIONE INVERNALE 2017/18

MATR.__________ COGNOME______________ NOME_______________

TEMA A

I PARTE

1) Studiare la funzione, senza l'uso della derivata seconda:

$$f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 2$$

C.E. $x+1>0 \Rightarrow x>-1, \quad f(0)=-2$

$$\lim_{x\to -1^+}(x+1)\ln(x+1)-2 = -2+\lim_{x\to -1^+}\frac{\ln(x+1)}{\frac{1}{(x+1)}} \overset{H}{=} -2+\lim_{x\to -1^+}\frac{\frac{1}{(x+1)}}{-\frac{1}{(x+1)^2}} = -2-\lim_{x\to -1^+}\frac{(x+1)^2}{(x+1)}$$

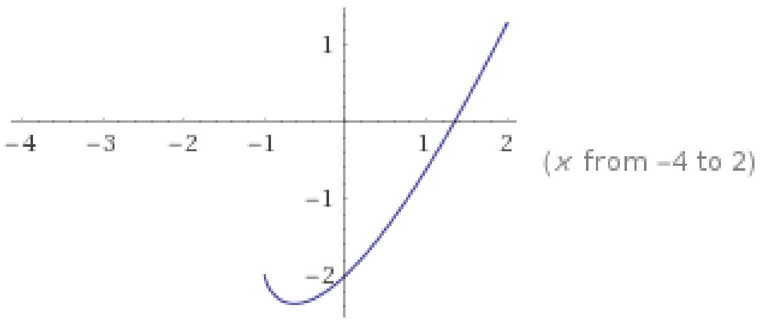
$$= -2-\lim_{x\to -1^+}(x+1) = -2; \quad \text{No asintoto verticale}$$

$\lim_{x\to +\infty}(x+1)\ln(x+1)-2 = +\infty;$ No asintoto orizzontale, no asintoto obliquo

$f'(x) = \ln(x+1)+\frac{x+1}{x+1} = \ln(x+1)+1 \geq 0 \Rightarrow \ln(x+1)\geq -1 \Rightarrow x+1 \geq \frac{1}{e} \Rightarrow x \geq \frac{1-e}{e}$

e la funzione è decrescente in $\left(-1, \frac{1-e}{e}\right)$, crescente in $\left(\frac{1-e}{e}, +\infty\right)$ con min nel punto $\left(\frac{1-e}{e}, -\frac{1+2e}{e}\right)$

Inoltre poiché $\lim_{x\to -1^+}\ln(x+1)+1 = -\infty;$ non è necessario studiare la $f''(x)$



2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2(x-1)}{x^2-1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2(x-1)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{2\sin(x-1)\cos(x-1)}{2x} = \lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)\cos(x-1)}{x} = 0$$

Riportare solo i passaggi essenziali

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{4x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{4x} = \lim_{x\to 0} \frac{x+9-9}{4x\left(\sqrt{x+9}+3\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{4\left(\sqrt{x+9}+3\right)} = \frac{1}{4*6} = \frac{1}{24}$$

4) Determinare $k \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua nel dominio indicato

$$f(x) = \begin{cases} x\,|x| & \text{se } x \leq -1 \\ kx^2 & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

$$f(-1) = -1 = \lim_{x\to -1^+} kx^2 = k \Rightarrow k = -1$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Rolle alla funzione

$$f(x) = \frac{x^2+1}{2x+1}$$

nell'intervallo [0, 2].

$f(x)$ è continua in $[0,2]$, inoltre $f(0) = 1 = f(2)$

$$f'(x) = \frac{2x(2x+1)-2(x^2+1)}{(2x+1)^2} = \frac{4x^2+2x-2x^2-2}{(2x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-2}{(2x+1)^2} \quad \text{derivabile in } (0,2)$$

Tutte le ipotesi del teorema sono verificate. Applichiamo la tesi:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2+2x-2 = 0 \Rightarrow x^2+x-1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1+4 = 5 \Rightarrow x = \frac{-1 \mp \sqrt{5}}{2} =< \begin{matrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ N.A.} \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{matrix}$$

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$$

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + c$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx = [-x \cos x + \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} + 0\cos 0 - \sin 0 = 1$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}} dx$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}} dx = \frac{1}{2}\int 2x(x^2+5)^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{2}\int (x^2+5)^{-\frac{3}{2}} d(x^2+5) = \frac{1}{2}\frac{(x^2+5)^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + c =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(x^2+5)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c = -\frac{1}{\sqrt{x^2+5}} + c$$

da cui, a causa dell'estremo superiore di integrazione:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}} dx = \lim_{h\to+\infty} \int_1^h \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}} = \lim_{h\to+\infty} \left[-\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}\right]_1^h = \lim_{h\to+\infty} -\frac{1}{\sqrt{h^2+5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Riportare solo i passaggi essenziali

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\sqrt{n}} x^n$$

Applicando il criterio della radicesi si ottiene $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{\sqrt{n}}{n}} =$

$$= \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[\sqrt{n}]{\sqrt{n}}\right)^2 = 1 \text{ da cui } R = 1 \text{ e poiché } c = 0 \text{ ne consegue che l'I.C. è } (-1,1).$$

Valutiamo il comportamento agli estremi

Se $x = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n^{\sqrt{n}}$ diverge perché il termine generale non è infinitesimo

Se $x = -1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n n^{\sqrt{n}}$ non converge

da cui, l'intervallo di convergenza è $(-1,1)$.

9) Calcolare il polinomio di Mc Laurin di ordine 3 della seguente funzione:

$$f(x) = \log(\cos x)$$

$f(x) = \log(\cos x) \Rightarrow f(0) = \log 1 = 0$

$f'(x) = -\dfrac{\sin x}{\cos x} = -\tan x \Rightarrow f'(0) = 0$

$f''(x) = -1 - \tan^2 x \Rightarrow f''(0) = -1$

$f'''(x) = -2\tan x\,(1 + \tan^2 x) \Rightarrow f'''(0) = 0$

E il polinomio risultante è: $P^3(x) = -\dfrac{x^2}{2}$

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \\ 4x + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-4R_1]{R_2-3R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ da cui si ottiene:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 4y + 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{5}{4}z - z = 0 \\ y = -\frac{5}{4}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{4}z \\ y = -\frac{5}{4}z \end{cases} \Rightarrow$$

Soluzione generale $\left(-\frac{1}{4}z, -\frac{5}{4}z\,, z\right)$

Riportare solo i passaggi essenziali