MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) I - SESSIONE INVERNALE 2017/18

MATR.___________ COGNOME_______________ NOME________________

TEMA B

I PARTE

1) Studiare la funzione, senza l'uso della derivata seconda:

$$f(x) = \frac{\ln x}{\ln x - 1}$$

C.E. $x > 0$ e $\ln x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq e$ da cui $x \in (0, e) \cup (e, +\infty)$, inoltre $f(1) = 0$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\ln x - 1} = 1$; No asintoto verticale

$\lim_{x\to e^{\mp}} \frac{\ln x}{\ln x - 1} = \mp\infty$; Asintoto verticale dx e sx

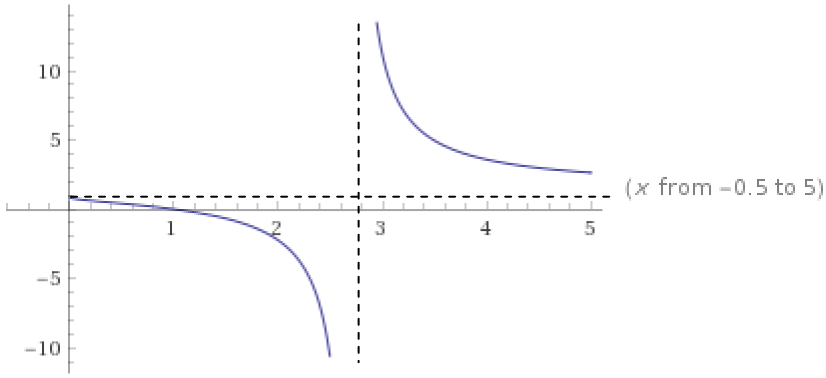
$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\ln x - 1} = 1$; Asintoto orizzontale

$f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(\ln x - 1) - \ln x \frac{1}{x}}{(\ln x - 1)^2} = \dfrac{\ln x - 1 - \ln x}{x(\ln x - 1)^2} = -\dfrac{1}{x(\ln x - 1)^2} < 0$ per $x \in (0, e) \cup (e, +\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)$ è strettamente decrescente

$$\lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{x(\ln x - 1)^2} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x - 1)^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} -\frac{-\frac{1}{x^2}}{2(\ln x - 1)\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{2(\ln x - 1)} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{2\frac{1}{x}} =$$

$= \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{2x} = -\infty$ da cui possiamo desumere il grafico



2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = 0$$

Riportare solo i passaggi essenziali

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{\frac{x^2-1}{(x-1)^2}} = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}} = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{\frac{(x+1)}{(x-1)}} = +\infty$$

4) Determinare $k \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua nel dominio indicato

$$f(x) = \begin{cases} |x^2-1|+1 & \text{se } x \leq -1 \\ \dfrac{k}{|x|} & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

$$f(-1) = 1 = \lim_{x\to -1^+} \frac{k}{|x|} = k \Rightarrow k = 1$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Rolle alla funzione

$$f(x) = \sqrt{3x-x^2}$$

nell'intervallo [0, 3].

$f(x)$ è continua in $[0,3]$, inoltre $f(0) = 0 = f(3)$

$f'(x) = \dfrac{3-2x}{2\sqrt{3x-x^2}}$ evidentemente derivabile in $(0,3)$

Tutte le ipotesi del teorema sono verificate. Applichiamo la tesi:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3-2x = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

Riportare solo i passaggi essenziali

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,dx \qquad (\text{Attenzione porre } x^2 = t)$$

ponendo $x^2 = t \Rightarrow 2xdx = dt$ ossia $xdx = \dfrac{dt}{2}$

si ha che $x = 1 \Rightarrow t = 1$ mentre se $x = 0 \Rightarrow t = 0$

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}[\arctan t]_0^1 = \frac{1}{2}(\arctan 1 - \arctan 0) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x}(2x+1)}\,dx \qquad \left(\text{Attenzione porre } \sqrt{2x} = t\right)$$

ponendo $\sqrt{2x} = t \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2x}}dx = dt$ ed inoltre $2x = t^2$ si ha

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x}(2x+1)}\,dx = \int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan t + c = \arctan\sqrt{2x} + c$$

da cui, a causa dell'estremo superiore di integrazione:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x}(2x+1)}\,dx = \lim_{h\to+\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{h} \frac{1}{\sqrt{2x}(2x+1)}\,dx = \lim_{h\to+\infty}\left[\arctan\sqrt{2x}\right]_{\frac{1}{2}}^{h} =$$

$$= \lim_{h\to+\infty} \arctan\sqrt{2h} - \arctan 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

<u>**Riportare solo i passaggi essenziali**</u>

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right)^n x^n$$

Applicando il criterio della radicesi si ottiene $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3}+\frac{1}{n} = \frac{1}{3}$

da cui $R = 3$ e poiché $c = 0$ ne consegue che $(-3,3)$ è l'intervallo di convergenza.

Valutiamo il comportamento agli estremi

Se $x = 3 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right)^n 3^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1+\frac{3}{n}\right)^n$ che diverge perché il termine generale non è infinitesimo

infatti $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{3}{n}\right)^n = e^3$

Se $x = -3 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(1+\frac{3}{n}\right)^n$ che non converge

da cui, l'intervallo di convergenza è $(-3,3)$.

9) Calcolare il polinomio di Mc Laurin di ordine 2, della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$$

$f(x) = \frac{1}{1+x+x^2} \Rightarrow f(0) = 1$

$f'(x) = -\frac{1+2x}{(1+x+x^2)^2} \Rightarrow f'(0) = -1$

$$f''(x) = -\frac{2(1+x+x^2)^2 - (1+2x)^2 2(1+x+x^2)}{(1+x+x^2)^4} = -\frac{2(1+x+x^2) - 2(1+2x)^2}{(1+x+x^2)^3} =$$

$$= -\frac{2+2x+2x^2-2-8x^2-8x}{(1+x+x^2)^3} = \frac{6x^2+6x}{(1+x+x^2)^3} \Rightarrow f''(0) = 0$$

E il polinomio risultante è: $P^2(x) = 1 - x$

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} -x + y + z = 2 \\ x - y = -1 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3+R_1]{R_2+R_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 scambia R_2]{} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ da cui si ottiene:

$$\begin{cases} -x + y + z = 2 \\ -y - z = 2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y + z = 2 \\ -y = 2 + 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x - 3 + 1 = 2 \\ y = -3 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \\ z = 1 \end{cases}$$

Soluzione generale $(-4, -3, 1)$

Riportare solo i passaggi essenziali