MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) I - SESSIONE INVERNALE 2017/18

MATR.___________ COGNOME________________ NOME________________

TEMA C

I PARTE

1) Studiare la funzione, senza l'uso della derivata seconda:

$$f(x) = \ln(x^2 + 5x - 6)$$

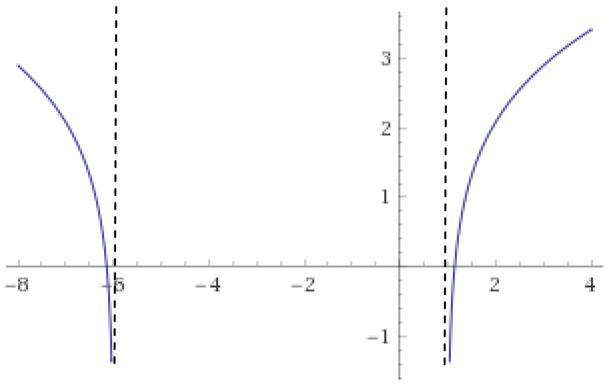
C.E. $x^2 + 5x - 6 > 0 \Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0$ con $\Delta = 25 + 24 = 49 = 7^2$ da cui $x \in (-\infty, -6) \cup (1, +\infty)$

$\lim_{x\to\mp\infty} \ln(x^2 + 5x - 6) = +\infty;$ No asintoto orizzontale

$\lim_{x\to\mp\infty} \frac{\ln(x^2 + 5x - 6)}{x} = 0;$ No asintoto obliquo

$\lim_{x\to-6^-} \ln\left(\underbrace{(x+6)}_{\to 0^-}\underbrace{(x-1)}_{<0}\right) = -\infty;$ $\lim_{x\to 1^+} \ln\left(\underbrace{(x+6)}_{>0}\underbrace{(x-1)}_{\to 0^+}\right) = -\infty;$ Asintoti verticali

$f'(x) = \frac{2x+5}{x^2+5x-6} \geq 0 \Rightarrow 2x + 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{5}{2};$ $f(x)$ decresce in $(-\infty, -6)$ e cresce in $(1, +\infty)$



(x from -8 to 4)

2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{\cos x} = 0$$

Riportare solo i passaggi essenziali

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{9x^2+x-7}-3x$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{9x^2+x-7}-3x = \lim_{x\to+\infty} \frac{9x^2+x-7-9x^2}{\sqrt{9x^2+x-7}+3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-7}{\sqrt{9x^2+x-7}+3x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{7}{x}}{\sqrt{9+\frac{1}{x}-\frac{7}{x^2}}+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

4) Determinare $k \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua nel dominio indicato

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+|x|} & \text{se } x \leq -1 \\ x^2+k|x| & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

$$f(-1) = \frac{1}{2} = \lim_{x\to-1^+} x^2+k|x| = 1+k \Rightarrow 1+k = \frac{1}{2} \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Rolle alla funzione

$$f(x) = \sqrt{9-x^2}$$

nell'intervallo [-2 , 2].

$f(x)$ è continua in $[-2,2]$, inoltre $f(-2) = f(2) = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$

$f'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$ evidentemente derivabile in $(-2,2)$

Tutte le ipotesi del teorema sono verificate. Applichiamo la tesi:

$f'(x) = 0 \Rightarrow -x = 0 \Rightarrow x = 0$

Riportare solo i passaggi essenziali

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_{-1}^{0} \frac{e^x}{\cos^2 e^x} dx$$

ponendo $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$

si ha che $x = 0 \Rightarrow t = 1$ mentre se $x = -1 \Rightarrow t = \frac{1}{e}$

$$\int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{dt}{\cos^2 t} = [\tan t]_{\frac{1}{e}}^{1} = \tan 1 - \tan \frac{1}{e}$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{2x+5}{x^2+1} dx$$

$$\int \frac{2x+5}{x^2+1} dx = \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \int \frac{5}{x^2+1} dx = \ln(x^2+1) + 5 \arctan x + c$$

da cui, a causa dell'estremo superiore di integrazione:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{2x+5}{x^2+1} dx = \lim_{h \to +\infty} \int_{0}^{h} \frac{2x+5}{x^2+1} dx = \lim_{h \to +\infty} [\ln(x^2+1) + 5 \arctan x]_0^h =$$

$$= \lim_{h \to +\infty} \ln(h^2+1) + 5 \arctan h - \ln 1 - 5 \arctan 0 = +\infty$$

Riportare solo i passaggi essenziali

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{5^n (n!)^2} x^n \quad \text{(Attenzione non studiare agli estremi!)}$$

Applicando il criterio del rapporto si ottiene $\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+2)!}{5^{n+1}\big((n+1)!\big)^2} \frac{5^n (n!)^2}{(2n)!} =$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{5\cdot 5^n (n+1)^2 (n!)^2} \frac{5^n (n!)^2}{(2n)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{5(n+1)^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4n^2+6n+2}{5n^2+10n+5} = \frac{4}{5}$$

da cui $R = \frac{5}{4}$ e poiché $c = 0$ ne consegue che $\left(-\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)$ è l'intervallo di convergenza.

9) Calcolare il polinomio di Mc Laurin di ordine 3 della seguente funzione:

$$f(x) = \arctan x$$

$f(x) = \arctan x \Rightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\frac{2(1+x^2)^2 - 2x2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} = -\frac{2(1+x^2) - 8x^2}{(1+x^2)^3} = -\frac{2+2x^2-8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$

$\Rightarrow f''(0) = -2$

E il polinomio risultante è: $P^3(x) = x - \frac{2x^3}{6} = x - \frac{x^3}{3}$

Riportare solo i passaggi essenziali

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+y-z=1 \\ x+y+z=2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$ da cui si ottiene:

$$\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2y-2z=0 \\ 2z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+z=1 \\ 2y-1=0 \\ z=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+z=1 \\ y=\frac{1}{2} \\ z=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{2} \\ z=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Soluzione generale $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Riportare solo i passaggi essenziali