MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) II - SESSIONE INVERNALE 2017/18

MATR.___________ COGNOME_______________ NOME________________

TEMA A

I PARTE

1) Studiare la funzione, senza l'uso della derivata seconda:

$$f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$$

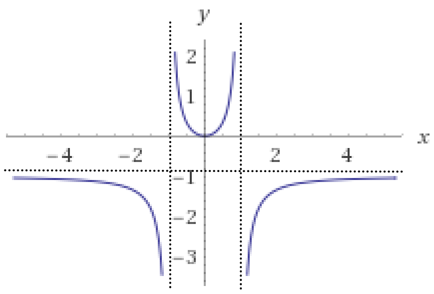
C.E. $1 - x^2 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 1,\ x \in \mathbb{R} - \{\mp 1\}$ inoltre $f(-x) = f(x)$ funzione pari, la studio in $[0,1) \cup (1, +\infty)$ si noti che $f(0) = 0$

$$\lim_{x\to 1^{\mp}} \frac{x^2}{1-x^2} = \lim_{x\to 1^{\mp}} \frac{x^2}{\underbrace{(1-x)}_{\to 0^{\pm}}(1+x)} = \pm\infty \text{ Asintoto verticale}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{1-x^2} = -1 \quad \text{Asintoto orizzontale}$$

$$f'(x) = \frac{2x(1-x^2) - x^2(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x - 2x^3 + 2x^3}{(1-x^2)^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2} \geq 0 \Rightarrow x > 0 \text{ con } f(x) \text{ crescente in}$$

$(0,1) \cup (1, +\infty)$ e con min nel punto $(0, 0)$



(x from −5.3 to 5.3)

2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{e^x - 1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{e^x - 1} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(2x)}{e^x} = 2$$

Riportare solo i passaggi essenziali

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4^x-1}{2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{4^x-1}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{4^x-1}{x}=\frac{1}{2}\ln 4=\ln 2$$

4) Determinare $k\in\mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua nel dominio indicato

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{se } x\leq 1\\ 3-k^2x^2 & \text{se } x>1\end{cases}$$

$$f(1)=2=\lim_{x\to 1^+}3-k^2x^2=3-k^2\Rightarrow 3-k^2=2\Rightarrow k^2=1\Rightarrow k=\mp 1$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Lagrange alla funzione

$$f(x)=(x+2)\ln(x+2)$$

nell'intervallo [-1, 1].

$f(x)$ è continua in $[-1,1]$, inoltre $f(-1)=0;\ f(1)=3\ln 3$

$f'(x)=\ln(x+2)+1$ derivabile in $(-1,1)$

Tutte le ipotesi del teorema sono verificate. Applichiamo la tesi:

$$\frac{3\ln 3}{2}=\ln(x+2)+1\Rightarrow\ln(x+2)=\frac{3\ln 3}{2}-\ln e=\ln\sqrt{27}-\ln e=\ln\frac{\sqrt{27}}{e}\Rightarrow x+2=\frac{\sqrt{27}}{e}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{\sqrt{27}}{e}-2$$

Riportare solo i passaggi essenziali

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^2 \frac{\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}\,dx$$

poniamo $u = 2x + 1 \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow \frac{du}{2} = dx$; per $x = 0 \Rightarrow u = 1$; per $x = 2 \Rightarrow u = 5$

$$\int \frac{\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\ln u}{u^2}dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{u}\ln u - \int -\frac{1}{u^2}du\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\ln u}{u} - \frac{1}{u}\right) + c = -\frac{1}{2u}(\ln u + 1) + c$$

$$\int_0^2 \frac{\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}dx = \left[-\frac{1}{2u}(\ln u + 1)\right]_1^5 = -\frac{1}{10}(\ln 5 + 1) + \frac{1}{2} = \frac{5 - \ln 5 - 1}{10} = \frac{4 - \ln 5}{10}$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_1^e \frac{1}{x\ln x}dx$$

Ponendo $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{x\ln x}dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + c = \ln|\ln x| + c$

da cui, a causa dell'estremo inferiore di integrazione:

$$\int_1^e \frac{1}{x\ln x}dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{1+\epsilon}^e \frac{1}{x\ln x}dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}[\ln|\ln x|]_{1+\epsilon}^2 = \lim_{\epsilon\to 0^+}\ln|\ln e| - \ln|\ln(1+\epsilon)| =$$

$$= -\lim_{\epsilon\to 0^+}\ln|\ln(1+\epsilon)| = +\infty$$

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,2^n}\;(x-1)^n$$

Applicando il criterio della radicesi si ottiene $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n\,2^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$ da cui $R = 2$ e poiché

$c = 1$ ne consegue che l'I. C. è $(-1,3)$.

Valutiamo il comportamento agli estremi

Se $x = 3 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n\,2^n}\;2^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge perché è la serie armonica

Se $x = -1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n\,2^n}\;2^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ converge perché è la serie armonica a segni alterni

da cui, l'intervallo di convergenza è $[-1,3)$.

9) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 3 e centro $x = 1$ della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

$f(x) = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow f(1) = 0$

$f'(x) = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$f''(x) = -\frac{4}{(x+1)^3} \Rightarrow f''(1) = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$

$f'''(x) = \frac{12}{(x+1)^4} \Rightarrow f'''(1) = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

E il polinomio risultante è: $P_1^3(x) = \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{3}{4}\frac{(x-1)^3}{6} = \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(x-1)^3}{8}$

10) Trovare, se esiste, la matrice inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2-R_1]{} \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & \vdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{R_2}{-3}]{} \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[R_1-2R_1]{} \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & \vdots & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{ da cui } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$