MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) III - SESSIONE INVERNALE 2017/18

MATR.___________ COGNOME_______________ NOME________________

TEMA A

I PARTE

1) Studiare la funzione, senza l'uso della derivata seconda:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$$

$C.E. x \in \mathbb{R} - \{0\}$ inoltre $f(-x) = -f(x)$ funzione dispari, la studio in $(0, +\infty)$; si noti che $f(1) = 0$

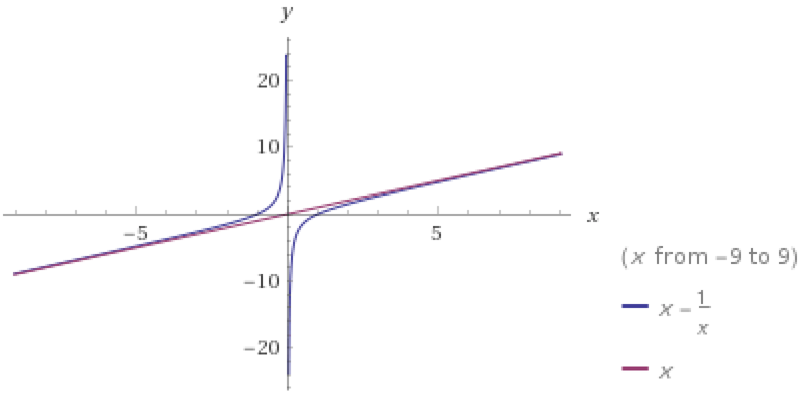
$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 - 1}{x} = -\infty$ Asintoto verticale

$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 - 1}{x} = +\infty$ No asintoto orizzontale

$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2} = 1 \Rightarrow q = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 - 1}{x} - x = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{x} = \lim_{x\to +\infty} -\frac{1}{x} = 0; y = x$ As. obliquo

$f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2 - 1)}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2} > 0$ in $(0, +\infty)$ con $f(x)$ crescente

Tenendo conto la che la funzione è dispari, si ha il seguente grafico:



2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{e^{\frac{1}{2-x}}}{\ln(2-x)}$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{e^{\frac{1}{2-x}}}{\ln(2-x)} \overset{H}{=} \lim_{x\to 2^-} \frac{\frac{1}{(2-x)^2} e^{\frac{1}{2-x}}}{-\frac{1}{2-x}} = -\lim_{x\to 2^-} \frac{e^{\frac{1}{2-x}}}{2-x} = -\lim_{x\to 2^-} e^{\frac{1}{2-x}} \frac{1}{2-x} = -\infty$$

Riportare solo i passaggi essenziali

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{x} = 4\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{4x} = 4$$

4) Determinare $k \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua nel dominio indicato

$$f(x) = \begin{cases} k^2x^2 - 4kx & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ 6\ln x - 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$f(1) = k^2 - 4k = \lim_{x\to 1^+} 6\ln x - 3 = -3 \Rightarrow k^2 - 4k + 3 = 0 \Rightarrow \frac{\Delta}{4} = 4 - 3 = 1 \Rightarrow k = 2 \mp 1 < \frac{1}{3}$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Lagrange alla funzione

$$f(x) = x\ln x$$

nell'intervallo [1, e].

$f(x)$ è continua in $[1, e]$, inoltre $f(1) = 0;\ f(e) = e$

$f'(x) = \ln x + 1$ derivabile in $(1, e)$

Tutte le ipotesi del teorema sono verificate. Applichiamo la tesi:

$$\frac{e}{e-1} = \ln x + 1 \Rightarrow \ln x = \frac{e}{e-1} - 1 = \frac{e-e+1}{e-1} = \frac{1}{e-1} \Rightarrow x = e^{\frac{1}{e-1}}$$

<u>Riportare solo i passaggi essenziali</u>

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^1 \frac{x^2-2x}{x^2+1}dx$$

$$\int \frac{x^2-2x}{x^2+1}dx = \int \frac{x^2+1-1-2x}{x^2+1}dx = \int dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx - \int \frac{2x}{x^2+1}dx =$$

$$= x - \arctan x - \ln(x^2+1) + c$$

$$\int_0^1 \frac{x^2-2x}{x^2+1}dx = [x - \arctan x - \ln(x^2+1)]_0^1 = 1 - \arctan 1 - \ln 2 - 0 + \arctan 0 + \ln 1 =$$

$$= 1 - \frac{\pi}{4} - \ln 2$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}dx$$

Ponendo $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{x\ln x}dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + c = \ln|\ln x| + c$

da cui, a causa dell'estremo superiore di integrazione:

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}dx = \lim_{n\to+\infty} \int_e^n \frac{1}{x\ln x}dx = \lim_{n\to+\infty} [\ln|\ln x|]_e^n = \lim_{n\to+\infty} \ln|\ln n| - \ln|\ln e| =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \ln|\ln n| = +\infty$$

Riportare solo i passaggi essenziali

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3+n}{e^n}\,(x-e)^n$$

Applicando il criterio del rapporto si ottiene $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^3+n+1}{e^{n+1}} \frac{e^n}{n^3+n} =$

$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^3+n+1}{n^3+n}\frac{1}{e} = \frac{1}{e}$ da cui $R = e$ e poiché $c = e$ ne consegue che $\mathrm{l'I.C.}$ è $(0, 2e)$.

Valutiamo il comportamento agli estremi

Se $x = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3+n}{e^n}(-1)^n e^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(n^3+n)$ indeterminata

Se $x = 2e \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3+n}{e^n} e^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n^3+n$ divergente perché ha termine generale non infinitesimo

da cui, l'intervallo di convergenza è $(0,2e)$.

9) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 2 e centro $x = -1$ della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}} \Rightarrow f(-1) = 1$

$f'(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{(x+2)^3}} \Rightarrow f'(-1) = -\frac{1}{2}$

$f''(x) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)(x+2)^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{(x+2)^5}} \Rightarrow f''(-1) = \frac{3}{4}$

E il polinomio risultante è: $P_{-1}^2(x) = 1 - \frac{1}{2}(x+1) + \frac{3}{4}\frac{(x+1)^2}{2} = 1 - \frac{x+1}{2} + \frac{3(x+1)^2}{8}$

Riportare solo i passaggi essenziali

10) Trovare, se esiste, la matrice inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \vdots \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3+R_1]{} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \vdots \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-R_2]{} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \vdots \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[\frac{R_3}{2}]{} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \vdots \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[R_1-R_3]{} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \vdots \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

da cui $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$