MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) SESSIONE APRILE 2017/18

MATR.___________ COGNOME________________ NOME_________________

TEMA A

I PARTE

1) Studiare la funzione, senza l'uso della derivata seconda:

$$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

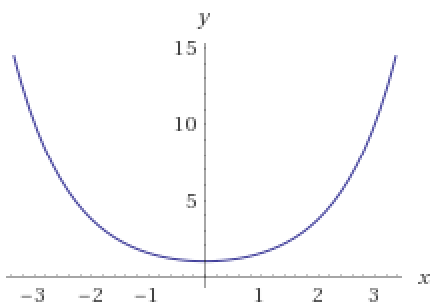
$C.E.\, x\in\mathbb{R}$ inoltre $f(-x)=\dfrac{e^{-x}+e^x}{2}= f(x)$ funzione pari, la studio in $[0,+\infty)$; si noti che $f(0)=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=+\infty$ No asintoto orizzontale, no obliquo

$f'(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\geq 0 \Rightarrow e^x-e^{-x}\geq 0\Rightarrow e^x-\dfrac{1}{e^x}\geq 0\Rightarrow \dfrac{e^{2x}-1}{e^x}\geq 0\Rightarrow e^{2x}-1\geq 0\Rightarrow$

$\Rightarrow (e^x-1)(e^x+1)\geq 0\Rightarrow e^x-1\geq 0\Rightarrow e^x\geq 1\Rightarrow x\geq 0$ e quindi si ha un minimo in $(0,1)$

Tenendo conto la che la funzione è pari, si ha il seguente grafico:



(x from −3.4 to 3.4)

2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{e^{2x}-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\ln(1+3x)}^{\to 0}}{\underbrace{e^{2x}-1}_{\to 0}}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{1+3x}}{2e^{2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{2(1+3x)e^{2x}}=\frac{2}{3}$$

<u>Riportare solo i passaggi essenziali</u>

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{3-x} - \sqrt{1-x}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \underbrace{\sqrt{3-x}}_{\to +\infty} \underbrace{-\sqrt{1-x}}_{\to -\infty} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3-x-1+x}{\sqrt{3-x}+\sqrt{1-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{\sqrt{3-x}+\sqrt{1-x}} = 0$$

4) Determinare $k \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua nel dominio indicato

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}+1 & \text{se } x \geq 0 \\ e^{x-k} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$f(0) = 1 = \lim_{x \to 0^-} e^{x-k} = e^{-k} \Rightarrow e^{-k} = 1 \Rightarrow -k = 0 \Rightarrow k = 0$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Lagrange alla funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$$

nell'intervallo [-2, 2].

$f(x)$ è continua in $[-2, 2]$, inoltre $f(-2) = \sqrt[3]{4} = f(2)$

$f'(x) = D\left(x^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ evidentemente non derivabile in 0

Per tale motivo il teorema non è verificato in $[-2, 2]$

<u>Riportare solo i passaggi essenziali</u>

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_1^e \frac{\log x + 1}{x} dx$$

Per la struttura dell'argomento si pone $t = \log x \Rightarrow dt = \frac{1}{x}dx$, inoltre $x = 1 \Rightarrow t = 0; x = e \Rightarrow t = 1$

$$\int_1^e \frac{\log x + 1}{x} dx = \int_0^1 (t+1)dt = \left[\frac{t^2}{2} + t\right]_0^1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_4^5 \frac{1}{\sqrt{x} - 2} dx$$

$$u = \sqrt{x} \Rightarrow u^2 = t \Rightarrow 2udu = dt \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{x}-2} dx = 2\int \frac{u}{u-2}\, du \underbrace{=}_{\frac{u}{u-2} = 1 + \frac{2}{u-2}} 2\int 1 + \frac{2}{u-2}\, du =$$

$$= 2\int du + 4\int \frac{1}{u-2}\, du = 2u + 4\log(u-2) + c = 2\sqrt{x} + 4\log\left(\sqrt{x} - 2\right) + c$$

da cui, a causa dell'estremo inferiore di integrazione:

$$\int_4^5 \frac{1}{\sqrt{x}-2} dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{4+\epsilon}^5 \frac{1}{\sqrt{x}-2} dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[2\sqrt{x} + 4\log\left(\sqrt{x}-2\right)\right]_{4+\epsilon}^5 =$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0^+} 2\sqrt{5} + 4\log\left(\sqrt{5}-2\right) - 2\sqrt{4+\epsilon} - 4\log\left(\sqrt{4+\epsilon}-2\right) = +\infty$$

Ossia non converge.

Riportare solo i passaggi essenziali

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n(n^2+2)}$$

Applicando il criterio della radice si ottiene $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{2^n(n^2+2)}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{n^2+2}} = \frac{1}{2}$

da cui $R = 2$ e poiché $c = 0$ ne consegue che l'I. C. è $(-2, 2)$.

Valutiamo il comportamento agli estremi

Se $x = -2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{2^n(n^2+2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2+2}$ convergente per il criterio di Leibniz

Se $x = 2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{2^n(n^2+2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+2} < \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ e quindi convergente

da cui, l'intervallo di convergenza è $[-2, 2]$.

9) Calcolare il polinomio di McLaurin di ordine 3 della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x}$$

$f(x) = \frac{x^2}{e^x} \Rightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{2xe^x - x^2e^x}{e^{2x}} = \frac{2x - x^2}{e^x} \Rightarrow f'(0) = 0$

$f''(x) = \frac{(2-2x)e^x - (2x - x^2)e^x}{e^{2x}} = \frac{2 - 4x + x^2}{e^x} \Rightarrow f''(0) = 2$

$f'''(x) = \frac{(-4+2x)e^x - (2 - 4x + x^2)e^x}{e^{2x}} = \frac{-6 + 6x - x^2}{e^x} \Rightarrow f'''(0) = -6$

E il polinomio risultante è: $P_0^3(x) = 2\frac{x^2}{2!} - 6\frac{x^3}{3!} = x^2 - x^3$

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$ da cui si ottiene:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ -2y = -2 \\ -2z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Soluzione generale } (1,1,1)$$

Riportare solo i passaggi essenziali