MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) I - SESSIONE ESTIVA 2017/18

MATR.___________ COGNOME_______________ NOME________________

TEMA A

I PARTE

1) Studiare la funzione, senza l'uso della derivata seconda:

$$f(x) = \log(e^x + 1)$$

$C.E.\, x \in \mathbb{R}$ inoltre $f(0) = \log 2$

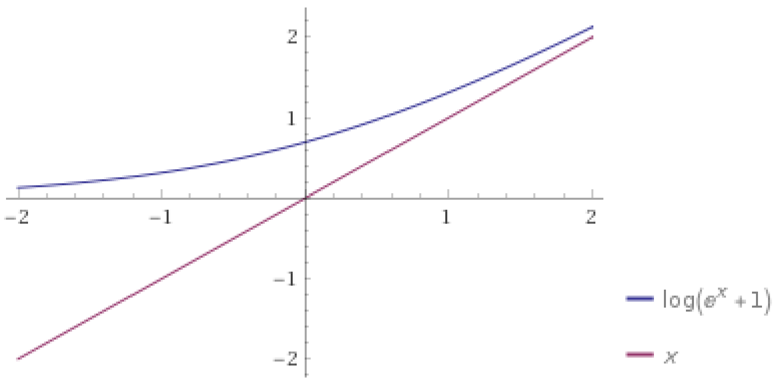
$\lim_{x \to -\infty} \log(e^x + 1) = 0$ Asintoto orizzontale

$\lim_{x \to +\infty} \log(e^x + 1) = +\infty$ No asintoto orizzontale;

$m = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{\log(e^x + 1)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{e^x + 1} = 1;$

$q = \lim_{x \to +\infty} \log(e^x + 1) - x = \lim_{x \to +\infty} \log(e^x + 1) - \log e^x = \lim_{x \to +\infty} \log \dfrac{e^x + 1}{e^x} = 0 \Rightarrow y = x$ Asintoto obl.

$f'(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1} > 0 \Rightarrow f(x)$ è strettamente crescente



2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-x^2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\overbrace{x^2}^{\to +\infty}}{\underbrace{e^{x^2}}_{\to +\infty}} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0$$

<u>**Riportare solo i passaggi essenziali**</u>

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\overbrace{x^2-4}^{\to 0^{\mp}}}{\underbrace{x-2}_{\to 0^{\mp}}}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}x+2=4$$

4) Determinare $k \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua nel dominio indicato

$$f(x)=\begin{cases}2x-3k & \text{se } x\geq 1\\ \dfrac{k}{2}-x^2 & \text{se } x<1\end{cases}$$

$$f(1)=2-3k=\lim_{x\to 1^-}\frac{k}{2}-x^2=\frac{k}{2}-1\Rightarrow 2-3k=\frac{k}{2}-1\Rightarrow\frac{k}{2}+3k=3\Rightarrow\frac{k+6k}{2}=3\Rightarrow k=\frac{6}{7}$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Lagrange alla funzione

$$f(x)=x\ln x$$

nell'intervallo [1, e].

$f(x)$ è continua in $[1,e]$, inoltre $f(1)=0$ e $f(e)=e$

$f'(x)=\ln x+1$ evidentemente derivabile in $[1,e]$, applico Lagrange

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{e}{e-1}=\ln x+1\Rightarrow\ln x=\frac{e}{e-1}-1=\frac{e-e+1}{e-1}=\frac{1}{e-1}\Rightarrow x=e^{\frac{1}{e-1}}$$

Riportare solo i passaggi essenziali

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^1 \frac{1}{3x+1}\,dx$$

Per la struttura dell'argomento si pone $t = 3x + 1 \Rightarrow dt = 3dx$ ossia $dx = \frac{dt}{3}$

$$\int \frac{1}{3x+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{3}\ln t + c = \frac{1}{3}\ln(3x+1) + c$$

$$\int_0^1 \frac{1}{3x+1}\,dx = \frac{1}{3}[\ln(3x+1)]_0^1 = \frac{1}{3}(\ln 4 - \ln 1) = \frac{\ln 4}{3}$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_{-\frac{1}{3}}^0 \frac{1}{3x+1}\,dx$$

L'integrale indefinito si risolve come il quesito precedente; a causa dell'estremo inferiore di integrazione:

$$\int_{-\frac{1}{3}}^0 \frac{1}{3x+1}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{-\frac{1}{3}+\epsilon}^0 \frac{1}{3x+1}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{3}\,[\ln(3x+1)]^0_{-\frac{1}{3}+\epsilon} = \frac{1}{3}\lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\ln 1 - \ln\left(3\left(-\frac{1}{3}+\epsilon\right)+1\right)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{\epsilon\to 0^+} - \ln(-1+3\epsilon+1) = -\frac{1}{3}\lim_{\epsilon\to 0^+}\ln(3\epsilon) = +\infty$$

Ossia non converge.

Riportare solo i passaggi essenziali

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n (x-1)^n$$

Applicando il criterio della radice si ottiene $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n} = 2$

da cui $R = \frac{1}{2}$ e poiché $c = 1$ ne consegue che l'I. C. è $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Valutiamo il comportamento agli estremi

Se $x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \left(\frac{1}{2} - 1\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ non converge

Se $x = \frac{3}{2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \left(\frac{3}{2} - 1\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 1$ che diverge

da cui, l'intervallo di convergenza è $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

9) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 2, nel punto $x_0 = 1$, della seguente funzione:

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

$f(x) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow f(1) = 2$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(1) = 0$

$f''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f''(1) = 2$

E il polinomio risultante è: $P_1^2(x) = 2 + 2\frac{(x-1)^2}{2!} = 2 + (x-1)^2$

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+z=1 \\ x+z=2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-\frac{1}{2}R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ da cui si ottiene:}$$

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ -2y=-2 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=3-z \\ y=1 \\ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2-z \\ y=1 \\ z\in\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \text{Soluzione generale } (2-z,1,z)$$

<u>Riportare solo i passaggi essenziali</u>