MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) III - SESSIONE ESTIVA 2017/18

MATR.__________ COGNOME______________ NOME_______________

TEMA A

I PARTE

1) Studiare la funzione, senza l'uso della derivata seconda:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

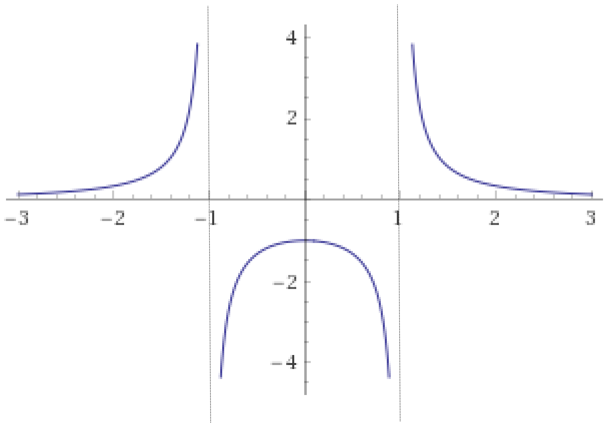
$C.E.\, x \in \mathbb{R} - \{\mp 1\}$ inoltre $f(0) = -1$ e poiché $f(-x) = f(x)$ la funzione è pari, la studio in $[0, \infty)$

$\lim_{x \to 1^{\mp}} \frac{1}{x^2 - 1} = \mp\infty$ Asintoto verticale dx e sx

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2 - 1} = 0$ Asintoto orizzontale dx

$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 - 1)^2} > 0$ se $x > 0 \Rightarrow f'(x) = 0$ in $x = 0$ che è punto di massimo

Dati gli asintoti, la simmetria e la derivata, il grafico è il seguente:



2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x + \sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\overbrace{\sin x}^{\to 0}}{\underbrace{x + \sqrt{x}}_{\to 0}} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{-\cos x}{1 + \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\to +\infty}} = 0$$

Riportare solo i passaggi essenziali

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x}=\lim_{x\to 0} 1-\frac{\sin x}{x}=0$$

4) Determinare $k\in\mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua nel dominio indicato

$$f(x)=\begin{cases} x+k & \text{per } x>1 \\ 0 & \text{per } x=1 \\ k^2-x & \text{per } x<1 \end{cases}$$

$f(0)=0$; $\lim_{x\to 1^+} x+k=1+k$ da cui $1+k=0\Rightarrow k_1=-1$;
inoltre $\lim_{x\to 1^-} k^2-x=k^2-1\Rightarrow k^2-1=0\Rightarrow k_{1,2}=\mp 1$ ma l'unica accettabile è $k_1=-1$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Lagrange alla funzione

$$f(x)=e^x+x$$

nell'intervallo [0,1]

$f(x)$ è continua in $[0,1]$, inoltre $f(0)=1, f(1)=e+1$

$f'(x)=e^x+1$ evidentemente derivabile in $[0,1]$, applico Lagrange

$$\frac{e+1-1}{1}=e^x+1\Rightarrow e=e^x+1\Rightarrow e^x=e-1\Rightarrow x=\ln(e-1)$$

Riportare solo i passaggi essenziali

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_{-2}^{0} \sqrt{1-3x}dx$$

Si fa la posizione $1-3x=t \Rightarrow -3dx=dt \Rightarrow dx=-\frac{dt}{3}$

$$\int \sqrt{1-3x}dx=-\frac{1}{3}\int \sqrt{t}dt=-\frac{1}{3}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=-\frac{2}{9}t\sqrt{t}+c=-\frac{2}{9}(1-3x)\sqrt{1-3x}$$

$$\int_{-2}^{0} \sqrt{1-3x}dx=\left[-\frac{2}{9}(1-3x)\sqrt{1-3x}\right]_{-2}^{0}=-\frac{2}{9}+\frac{2}{9}7\sqrt{7}$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_{1}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}}dx$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}}dx=\int x(x^2+5)^{-\frac{3}{2}}dt \qquad \text{ponendo } x^2+5=t \Rightarrow 2xdx=dt \Rightarrow xdx=\frac{dt}{2}$$

$$\frac{1}{2}\int t^{-\frac{3}{2}}dt=\frac{1}{2}\frac{t^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}=\frac{1}{2}\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}+c=\frac{1}{2}(-2)t^{-\frac{1}{2}}+c=-\frac{1}{\sqrt{t}}+c=-\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}+c$$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}}dx=\lim_{n\to\infty}\int_{1}^{n} \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}}dx=\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}\right]_{1}^{n}=\lim_{n\to\infty}-\frac{1}{\sqrt{n^2+5}}+\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

Ossia converge.

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(n+6)^2(x+2)^n$$

Applicando il criterio del rapporto si ottiene $\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+7)^2}{(n+6)^2}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+7}{n+6}\right)^2=1$

da cui $R=1$ e poiché $c=-2$ ne consegue che l'I. C. è $(-3,-1)$.

Valutiamo il comportamento agli estremi

Se $x=-1\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}(n+6)^2$ che diverge

Se $x=-3\Rightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}(n+6)^2(-1)^n$ che non converge

da cui, l'intervallo di convergenza è $[-3,-1]$.

9) Calcolare il polinomio di Mac Laurin di ordine 2 della seguente funzione:

$$f(x)=\sin(3x)$$

$f(x)=\sin(3x)\Rightarrow f(0)=\sin(0)=0$

$f'(x)=3\cos(3x)=3\Rightarrow f'(0)=3$

$f''(x)=-9\sin(3x)\ \ =0\Rightarrow f''(0)=0$

E il polinomio risultante è: $P_0^2(x)=3x$

Riportare solo i passaggi essenziali

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 8 \\ 3x + 4y + z = 8 \\ 4x + y + 3z = 8 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 8 \\ 4 & 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{R_2-3R_1 \\ R_3-4R_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & -5 & -11 & -16 \\ 0 & -11 & -13 & -24 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2=\frac{-R_2}{5} \\ R_3=\frac{-R_3}{11}}]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 11\backslash 5 & 16\backslash 5 \\ 0 & 1 & 13\backslash 11 & 24\backslash 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3=R_3-R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 11\backslash 5 & 16\backslash 5 \\ 0 & 0 & -56\backslash 55 & -56\backslash 55 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 8 \\ y + \frac{11}{5}z = \frac{16}{5} \\ -\frac{56}{55}z = -\frac{56}{55} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 - 2y - 4z \\ y = \frac{16}{5} - \frac{11}{5} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 - 3 - 4 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{Soluzione generale } (1,1,1)$$

Riportare solo i passaggi essenziali