

MATR. \_\_\_\_\_ COGNOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_\_

**TEMA A**

**I PARTE**

1) Studiare la funzione, senza l'uso della derivata seconda:

$$f(x) = \log(e^x + 1)$$

C.E.  $x \in \mathbb{R}$  inoltre  $f(0) = \log 2$

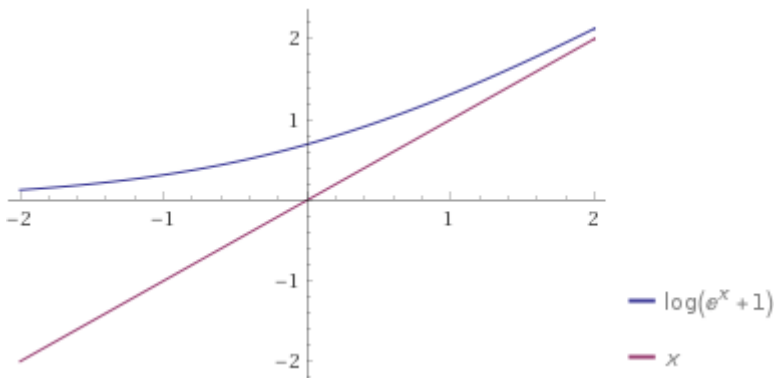
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \log(e^x + 1) = 0 \text{ Asintoto orizzontale}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(e^x + 1) = +\infty \text{ No asintoto orizzontale;}$$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(e^x + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = 1;$$

$$q = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(e^x + 1) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(e^x + 1) - \log e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log \frac{e^x + 1}{e^x} = 0 \Rightarrow y = x \text{ Asintoto obl.}$$

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} > 0 \Rightarrow f(x) \text{ è strettamente crescente}$$



2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \ln x}{2x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overbrace{3x + \ln x}^{\rightarrow +\infty}}{\underbrace{2x + 1}_{\rightarrow +\infty}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{2} + \frac{1}{2x} = \frac{3}{2}$$

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{\sin x}{x} = 0$$

4) Determinare  $k \in \mathbb{R}$  in modo che la funzione  $f(x)$  sia continua nel dominio indicato

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3k & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{k}{2} - x^2 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$$f(1) = 2 - 3k = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{k}{2} - x^2 = \frac{k}{2} - 1 \Rightarrow 2 - 3k = \frac{k}{2} - 1 \Rightarrow \frac{k}{2} + 3k = 3 \Rightarrow \frac{k + 6k}{2} = 3 \Rightarrow k = \frac{6}{7}$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Rolle alla funzione

$$f(x) = e^{x^2}$$

nell'intervallo  $[-1,1]$

$f(x)$  è continua in  $[-1,1]$ , inoltre  $f(-1) = f(1) = e$

$f'(x) = 2xe^{x^2}$  evidentemente derivabile in  $[-1,1]$ , applico Rolle

$$2xe^{x^2} = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

## II PARTE

---

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_{-2}^0 \sqrt{1-3x} dx$$

Si fa la posizione  $1 - 3x = t \Rightarrow -3dx = dt \Rightarrow dx = -\frac{dt}{3}$

$$\int \sqrt{1-3x} dx = -\frac{1}{3} \int \sqrt{t} dt = -\frac{1}{3} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{9} t\sqrt{t} + c = -\frac{2}{9} (1-3x)\sqrt{1-3x}$$

$$\int_{-2}^0 \sqrt{1-3x} dx = \left[ -\frac{2}{9} (1-3x)\sqrt{1-3x} \right]_{-2}^0 = -\frac{2}{9} + \frac{2}{9} 7\sqrt{7}$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx$$

Ponendo  $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt \Rightarrow \int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \arctan t + c = \arctan e^x + c$  da cui

$$\int_0^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} [\arctan e^x]_0^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \overbrace{\arctan e^n}^{\rightarrow \frac{\pi}{4}} - \arctan 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Ossia converge.

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n (x-1)^n$$

Applicando il criterio della radice si ottiene  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2^n} = 2$

da cui  $R = \frac{1}{2}$  e poiché  $c = 1$  ne consegue che l'I. C. è  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ .

Valutiamo il comportamento agli estremi

$$\text{Se } x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \left(\frac{1}{2} - 1\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \text{ non converge}$$

$$\text{Se } x = \frac{3}{2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \left(\frac{3}{2} - 1\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 \text{ che diverge}$$

da cui, l'intervallo di convergenza è  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ .

9) Calcolare il polinomio di Mac Laurin di ordine 2 della seguente funzione:

$$f(x) = \ln(e^{3x-1})$$

$$f(x) = \ln(e^{3x-1}) \Rightarrow f(0) = \ln(e^{-1}) = -1$$

$$f'(x) = \frac{3e^{3x-1}}{e^{3x-1}} = 3 \Rightarrow f'(0) = 3$$

E il polinomio risultante è:  $P_1^2(x) = -1 + 3x$

In alternativa basta ricordare che  $\ln(e^{3x-1}) = 3x - 1$  e che quindi il polinomio di Mac Laurin di ordine 2 è proprio l'esponente di  $e$

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 8 \\ 2x + 4y + z = 8 \\ 4x + y + 2z = 8 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2-2R_1 \\ R_3-4R_1}]{\phantom{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -7 & -8 \\ 0 & -7 & -14 & -24 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & -7 & -14 & -24 \\ 0 & 0 & -7 & -8 \end{pmatrix} \text{ da cui si ottiene:}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 8 \\ 7y + 14z = 24 \\ 7z = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 - 2y - 4z \\ 7y = 24 - 14\frac{8}{7} \\ z = \frac{8}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 - 2\frac{8}{7} - 4\frac{8}{7} \\ y = \frac{8}{7} \\ z = \frac{8}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{7} \\ y = \frac{8}{7} \\ z = \frac{8}{7} \end{cases} \text{ Soluzione generale } \left(\frac{8}{7}, \frac{8}{7}, \frac{8}{7}\right)$$