MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina)      SESSIONE NOVEMBRE 2018/19

MATR.___________ COGNOME________________ NOME_________________

**COMPLETA**

**I PARTE**

1) Studiare la funzione, senza l'uso della derivata seconda:

$$f(x) = \log(e^x + 1)$$

$C.E.\, x \in \mathbb{R}$ inoltre $f(0) = \log 2$

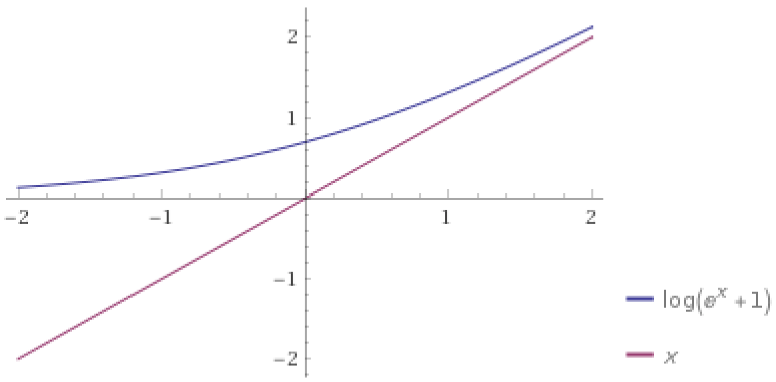
$\lim_{x\to-\infty} \log(e^x + 1) = 0$ Asintoto orizzontale

$\lim_{x\to+\infty} \log(e^x + 1) = +\infty$ No asintoto orizzontale;

$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(e^x+1)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = 1;$

$q = \lim_{x\to+\infty} \log(e^x + 1) - x = \lim_{x\to+\infty} \log(e^x+1) - \log e^x = \lim_{x\to+\infty} \log\frac{e^x+1}{e^x} = 0 \Rightarrow y = x$ Asintoto obl.

$f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1} > 0 \Rightarrow f(x)$ è strettamente crescente




2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x + \ln\, x}{2x+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{3x+\ln\, x}^{\to+\infty}}{\underbrace{2x+1}_{\to+\infty}} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{2} + \frac{1}{2x} = \frac{3}{2}$$



**Riportare solo i passaggi essenziali**

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x}=\lim_{x\to 0} 1-\frac{\sin x}{x}=0$$

4) Determinare $k \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua nel dominio indicato

$$f(x)=\begin{cases}2x-3k & \text{se } x\geq 1\\ \dfrac{k}{2}-x^2 & \text{se } x<1\end{cases}$$

$$f(1)=2-3k=\lim_{x\to 1^-}\frac{k}{2}-x^2=\frac{k}{2}-1\Rightarrow 2-3k=\frac{k}{2}-1\Rightarrow\frac{k}{2}+3k=3\Rightarrow\frac{k+6k}{2}=3\Rightarrow k=\frac{6}{7}$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Rolle alla funzione

$$f(x)=e^{x^2}$$

nell'intervallo [-1,1]

$f(x)$ è continua in $[-1,1]$, inoltre $f(-1)=f(1)=e$

$f'(x)=2xe^{x^2}$ evidentemente derivabile in $[-1,1]$, applico Rolle

$$2xe^{x^2}=0\Rightarrow 2x=0\Rightarrow x=0$$

**II PARTE**

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_{-2}^{0} \sqrt{1-3x}dx$$

Si fa la posizione $1-3x=t \Rightarrow -3dx=dt \Rightarrow dx=-\frac{dt}{3}$

$$\int \sqrt{1-3x}dx=-\frac{1}{3}\int \sqrt{t}dt=-\frac{1}{3}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=-\frac{2}{9}t\sqrt{t}+c=-\frac{2}{9}(1-3x)\sqrt{1-3x}$$

$$\int_{-2}^{0} \sqrt{1-3x}dx=\left[-\frac{2}{9}(1-3x)\sqrt{1-3x}\right]_{-2}^{0}=-\frac{2}{9}+\frac{2}{9}7\sqrt{7}$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$$

Ponendo $e^x=t \Rightarrow e^x dx=dt \Rightarrow \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx=\int \frac{1}{t^2+1}dt=\arctan t+c=\arctan e^x+c$ da cui

$$\int_{0}^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx=\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{n} \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx=\lim_{n\to\infty}[\arctan e^x]_0^n=\lim_{n\to\infty}\overbrace{\arctan \overbrace{e^n}^{\to\infty}}^{\to\frac{\pi}{4}}-\arctan 1=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

Ossia converge.

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n (x-1)^n$$

Applicando il criterio della radice si ottiene $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n} = 2$

da cui $R = \frac{1}{2}$ e poiché $c = 1$ ne consegue che l'I. C. è $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Valutiamo il comportamento agli estremi

Se $x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \left(\frac{1}{2} - 1\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ non converge

Se $x = \frac{3}{2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \left(\frac{3}{2} - 1\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 1$ che diverge

da cui, l'intervallo di convergenza è $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

9) Calcolare il polinomio di Mac Laurin di ordine 2 della seguente funzione:

$$f(x) = \ln(e^{3x-1})$$

$f(x) = \ln(e^{3x-1}) \Rightarrow f(0) = \ln(e^{-1}) = -1$

$f'(x) = \frac{3e^{3x-1}}{e^{3x-1}} = 3 \Rightarrow f'(0) = 3$

E il polinomio risultante è: $P_1^2(x) = -1 + 3x$

In alternativa basta ricordare che $\ln(e^{3x-1}) = 3x - 1$ e che quindi il polinomio di Mac Laurin

di ordine 2 è proprio l'esponente di $e$



**Riportare solo i passaggi essenziali**

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x+2y+4z=8 \\ 2x+4y+z=8 \\ 4x+y+2z=8 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-4R_1]{R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -7 & -8 \\ 0 & -7 & -14 & -24 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \curvearrowright R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & -7 & -14 & -24 \\ 0 & 0 & -7 & -8 \end{pmatrix}$$ da cui si ottiene:

$$\begin{cases} x+2y+4z=8 \\ 7y+14z=24 \\ 7z=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8-2y-4z \\ 7y=24-14\frac{8}{7} \\ z=\frac{8}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8-2\frac{8}{7}-4\frac{8}{7} \\ y=\frac{8}{7} \\ z=\frac{8}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{8}{7} \\ y=\frac{8}{7} \\ z=\frac{8}{7} \end{cases}$$ Soluzione generale $\left(\frac{8}{7},\frac{8}{7},\frac{8}{7}\right)$



**Riportare solo i passaggi essenziali**