MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina)   I SESSIONE INVERNALE 2018/19

MATR.__________ COGNOME______________ NOME_______________

TEMA A

I PARTE

---

1) Studiare la funzione, senza l'uso della derivata seconda:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{e^x}$$

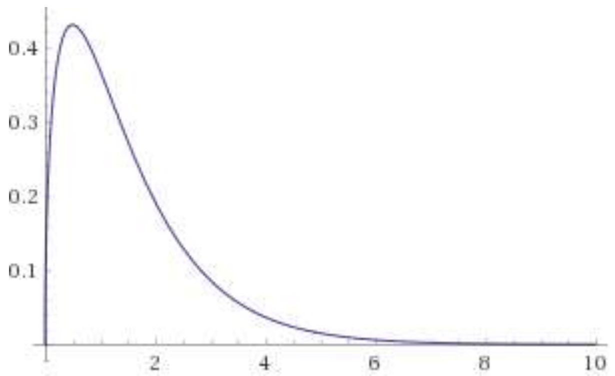
$C.E.\, x\geq 0$ inoltre $f(0)=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^x}=0$ Asintoto orizzontale;

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}e^x-\sqrt{x}e^x}{(e^x)^2}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}}{e^x}=\frac{1-2x}{2e^x\sqrt{x}}>0\Rightarrow 1-2x>0\Rightarrow x<\frac{1}{2}$$

$f(x)$ è strettamente crescente per $0<x<\frac{1}{2}$, massimo in $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$, decrescente per $x>\frac{1}{2}$

Evidentemente è presente un flesso subito dopo il massimo.



2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x-1}{\tan x}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\overbrace{\cos x-1}^{\to0}}{\underbrace{\tan x}_{\to0}}\overset{H}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{-\sin x}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to0^+}-\sin x\cos^2 x=0$$

Riportare solo i passaggi essenziali

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)-3(x-1)^2}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)-3(x-1)^2}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)-3(x-1)=2$$

4) Determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua nel dominio indicato

$$f(x)=\begin{cases} a\sqrt{x} & \text{se } x\geq 1 \\ a^2x & \text{se } x<1 \end{cases}$$

$$f(1)=a=\lim_{x\to 1^-}a^2x=a^2\Rightarrow a=a^2\Rightarrow a^2-a=0\Rightarrow a(a-1)=0\Rightarrow a=0\vee a=1$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Rolle alla funzione

$$f(x)=e^{x^2-1}$$

nell'intervallo [-1,1]

$f(x)$ è continua in $[-1,1]$, inoltre $f(-1)=1=f(1)$

$$f'(x)=2x\,e^{x^2-1} \text{ evidentemente derivabile in } (-1,1),$$

applico Rolle

$2x\,e^{x^2-1}=0\Rightarrow x=0$

Riportare solo i passaggi essenziali

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_1^2 \sqrt{3x-1}dx$$

Si fa la posizione $3x-1=t \Rightarrow 3dx=dt \Rightarrow dx=\frac{dt}{3}$

$$\int \sqrt{3x-1}\,dx=\frac{1}{3}\int \sqrt{t}dt=\frac{1}{3}\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{t^3}}{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{9}t\sqrt{t}+c=\frac{2}{9}(3x-1)\sqrt{3x-1}+c$$

$$\int_1^2 \sqrt{3x-1}dx=\frac{2}{9}\left[(3x-1)\sqrt{3x-1}\right]_1^2=\frac{2}{9}\left(5\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right)$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_0^1 \frac{1-3x}{\sqrt{x}}dx$$

$$\int \frac{1-3x}{\sqrt{x}}dx=\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-3\sqrt{x}\right)dx=\int\left(x^{-\frac{1}{2}}-3x^{\frac{1}{2}}\right)dx=\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}-3\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+c=2\sqrt{x}-2x\sqrt{x}+c$$

$$\int_0^1 \frac{1-3x}{\sqrt{x}}dx=\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^1 \frac{1-3x}{\sqrt{x}}dx=\lim_{\epsilon\to 0^+}\left[2\sqrt{x}-2x\sqrt{x}\right]_\epsilon^1=\lim_{\epsilon\to 0^+}2-2-2\sqrt{\epsilon}+2\epsilon\sqrt{\epsilon}=0$$

Ossia converge.

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n x^n$$

Applicando il criterio della radice si ottiene $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}-1 = 0$

da cui $R = +\infty$ e quindi l'I. C. è $\mathbb{R}$.

9) Calcolare il polinomio di Mac Laurin di ordine 3 della seguente funzione:

$$f(x)=\frac{x}{2-x}$$

$f(x)=\dfrac{x}{2-x} \Rightarrow f(0)=0$

$f'(x)=\dfrac{2-x+x}{(2-x)^2}=\dfrac{2}{(2-x)^2} \Rightarrow f'(0)=\dfrac{1}{2}$

$f''(x)=\dfrac{4(2-x)}{(2-x)^4}=\dfrac{4}{(2-x)^3} \Rightarrow f''(0)=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$

$f'''(x)=\dfrac{12(2-x)^2}{(2-x)^6}=\dfrac{12}{(2-x)^4} \Rightarrow f'''(0)=\dfrac{12}{16}=\dfrac{3}{4}$

E il polinomio risultante è: $P_1^3(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{2\cdot 2!}+\dfrac{3}{4}\dfrac{x^3}{3!}=\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x^3}{8}$

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+z=2 \\ x+y-z=2 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ da cui si ottiene:

$\begin{cases} x+y+z=3 \\ -2y=-1 \\ -2z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3-y-z \\ y=\frac{1}{2} \\ z=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3-1 \\ y=\frac{1}{2} \\ z=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=\frac{1}{2} \\ z=\frac{1}{2} \end{cases}$ Soluzione generale $\left(2,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

Riportare solo i passaggi essenziali