MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina)   I SESSIONE INVERNALE 2018/19

MATR.___________ COGNOME________________ NOME_________________

TEMA B

I PARTE

---

1) Studiare la funzione, senza l'uso della derivata seconda:

$$f(x)=\frac{x}{\ln{(x^2)}}$$

$C.E.\, x\neq 0$ e $x\neq\mp 1$, inoltre $f(-x)=-\dfrac{x}{\ln{(x^2)}}=-f(x)$ funzione dispari, la studiamo in $(0,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\ln{(x^2)}}=0$ No asintoto verticale;

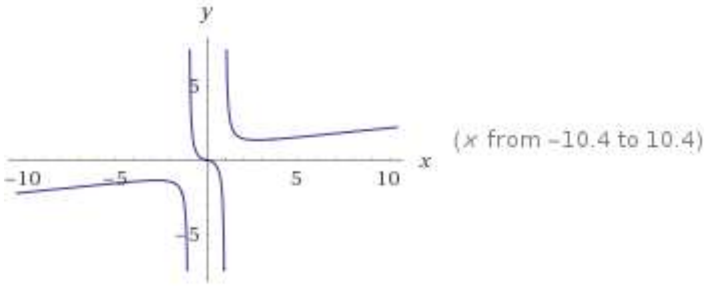
$\lim\limits_{x\to 1^\mp}\dfrac{x}{\ln{(x^2)}}=\mp\infty$ Asintoto verticale;

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{\ln{(x^2)}}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{x\ln{(x^2)}}=0$ No asintoti orizzontale ed obliquo

$f'(x)=\dfrac{\ln x^2-x\dfrac{2x}{x^2}}{\ln^2 x^2}=\dfrac{\ln x^2-2}{\ln^2 x^2}>0\Rightarrow \ln x^2-2>0\Rightarrow \ln x^2>2\Rightarrow x^2>e^2\Rightarrow x<-e\vee x>e$

$f(x)$ è strettamente crescente per $x>e$, decrescente in $0<x<e$,

minimo in $\left(e,\dfrac{e}{2}\right)$, tenendo conto che è dispari:



In 0^+ la derivata prima $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x^2-2}{\ln^2 x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\ln\, x^2}-\dfrac{2}{\ln^2 x^2}=0$

2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\, x-1}{\cos x}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\overbrace{\sin\, x-1}^{\to 0}}{\underbrace{\cos x}_{\to 0}}\overset{H}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{-\sin(x)}=0$$

Riportare solo i passaggi essenziali

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)-3(x-2)}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)-3(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)-3=1$$

4) Determinare $a\in\mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua nel dominio indicato

$$f(x)=\begin{cases} x\sqrt{a} & \text{se } x\geq 1 \\ ax & \text{se } x<1 \end{cases}$$

$$f(1)=\sqrt{a}=\lim_{x\to 1^-}ax=a\Rightarrow \sqrt{a}=a\Rightarrow a=a^2\Rightarrow a^2-a=0\Rightarrow a(a-1)=0\Rightarrow a=0\vee a=1$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Rolle alla funzione

$$f(x)=\frac{x^2}{x+2}$$

nell'intervallo [-1,2]

$f(x)$ è continua in $[-1,2]$, inoltre $f(-1)=1=f(2)$

$$f'(x)=\frac{2x(x+2)-x^2}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$$ evidentemente derivabile in $(-1,2)$,

applico Rolle

$$x^2+4x=0\Rightarrow x(x+4)=0\Rightarrow x=<\begin{matrix} 0 & \mathit{accettabile} \\ -4 & \mathit{non\ accettabile}\end{matrix}$$

Riportare solo i passaggi essenziali

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_1^2 \sqrt{x-1}dx$$

Si fa la posizione $x-1=t \Rightarrow dx=dt$

$$\int \sqrt{x-1}\,dx = \int \sqrt{t}dt = \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{\sqrt{t^3}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}t\sqrt{t} + c = \frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1} + c$$

$$\int_1^2 \sqrt{x-1}dx = \frac{2}{3}\left[(x-1)\sqrt{x-1}\right]_1^2 = \frac{2}{3}$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_0^1 \frac{1-x}{\sqrt{x}}dx$$

$$\int \frac{1-x}{\sqrt{x}}dx = \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)dx = \int \left(x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right)dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = 2\sqrt{x} - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$$

$$\int_0^1 \frac{1-x}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^1 \frac{1-x}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[2\sqrt{x} - \frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon\to 0^+} 2 - \frac{2}{3} - 2\sqrt{\epsilon} + \frac{2}{3}\epsilon\sqrt{\epsilon} = \frac{4}{3}$$

Ossia converge.

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^n} x^n$$

Applicando il criterio della radice si ottiene $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

da cui $R = +\infty$ e quindie l'I. C. è $\mathbb{R}$.

9) Calcolare il polinomio di Mac Laurin di ordine 1 della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x+2)}$$

$f(x) = \dfrac{x}{\ln(x+2)} \Rightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = \dfrac{\ln(x+2) - \frac{x}{x+2}}{\ln^2(x+2)} \Rightarrow f'(0) = \dfrac{\ln 2}{\ln^2 2} = \dfrac{1}{\ln 2}$

E il polinomio risultante è: $P_1^1(x) = \dfrac{x}{\ln 2}$

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x - y + z = 3 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ da cui si ottiene:

$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ -2y = -1 \\ -2z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - y - z \\ y = \frac{1}{2} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 - \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = 1 \end{cases}$ Soluzione generale $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$

Riportare solo i passaggi essenziali