MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) I SESSIONE INVERNALE 2018/19

MATR.__________ COGNOME______________ NOME_______________

TEMA C

I PARTE

1) Studiare la funzione, senza l'uso della derivata seconda:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

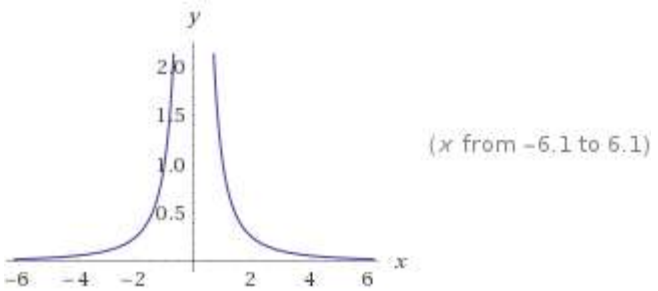
$C.E.\ x \neq 0$, inoltre $f(-x) = f(x)$ funzione pari, la studiamo in $(0, +\infty)$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$ Asintoto verticale;

$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ Asintoto orizzontale

$f'(x) = \frac{-2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3} > 0 \Rightarrow \frac{2}{x^3} < 0 \Rightarrow x < 0$

$f(x)$ è strettamente decrescente per $x > 0$, tenendo conto che è pari:



2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{\sin x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\tan x}^{\to 0}}{\underbrace{\sin x}_{\to 0}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos^3 x} = 1$$

Riportare solo i passaggi essenziali

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{(x^2-9)-(x-3)}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{(x^2-9)-(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{x+3-1} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{5}$$

4) Determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua nel dominio indicato

$$f(x) = \begin{cases} ae^x & \text{se } x \geq 0 \\ a & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$f(0) = a = \lim_{x\to 0^-} a = a \Rightarrow a = a \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Lagrange alla funzione

$$f(x) = \ln(x^2)$$

nell'intervallo [1,e]

$f(x)$ è continua in $[1, e]$, inoltre $f(1) = 0, f(e) = 2$

$f'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$ evidentemente derivabile in $(1, e)$,

applico Lagrange

$$\frac{2-0}{e-1} = \frac{2}{x} \Rightarrow \frac{2}{e-1} = \frac{2}{x} \Rightarrow \frac{1}{e-1} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = e-1$$

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_1^2 x\sqrt{x^2-1}dx$$

Si fa la posizione $x^2-1=t \Rightarrow 2xdx=dt \Rightarrow xdx=\dfrac{dt}{2}$

$$\int x\sqrt{x^2-1}\,dx=\frac{1}{2}\int\sqrt{t}dt=\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{t^3}}{\frac{3}{2}}+c=\frac{1}{3}t\sqrt{t}+c=\frac{1}{3}(x^2-1)\sqrt{x^2-1}+c$$

$$\int_1^2 x\sqrt{x^2-1}dx=\frac{1}{3}\left[(x^2-1)\sqrt{x^2-1}\right]_1^2=\frac{1}{3}\left(3\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_0^2\frac{2-x}{\sqrt{x}}dx$$

$$\int\frac{2-x}{\sqrt{x}}dx=\int\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)dx=\int\left(2x^{-\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)dx=2\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}-\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+c=4\sqrt{x}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+c$$

$$\int_0^2\frac{2-x}{\sqrt{x}}dx=\lim_{\epsilon\to0^+}\int_\epsilon^2\frac{2-x}{\sqrt{x}}dx=\lim_{\epsilon\to0^+}\left[4\sqrt{x}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_\epsilon^2=\lim_{\epsilon\to0^+}4\sqrt{2}-\frac{4}{3}\sqrt{2}-4\sqrt{\epsilon}+\frac{2}{3}\epsilon\sqrt{\epsilon}=$$

$$=4\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)=4\frac{2}{3}\sqrt{2}=\frac{8}{3}\sqrt{2}$$

Ossia converge.

Riportare solo i passaggi essenziali

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} x^n$$

Applicando il criterio del rapporto si ottiene $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \frac{n!}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = 0$

da cui $R = +\infty$ e quindie l'I. C. è $\mathbb{R}$.

9) Calcolare il polinomio di Mac Laurin di ordine 1 della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x+1}}$$

$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow f(0) = 1$

$f'(x) = \frac{e^x\left(\sqrt{x+1}\right) - e^x \frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1} \Rightarrow f'(0) = \frac{1-\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$

E il polinomio risultante è: $P_1^1(x) = 1 + \frac{1}{2}x$

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ da cui si ottiene:

$\begin{cases} x+y+z=1 \\ -2y=-1 \\ -2z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1-y-z \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1-1 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$ Soluzione generale $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$