MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina)   II SESSIONE INVERNALE 2018/19

MATR.___________ COGNOME________________ NOME________________

TEMA A

I PARTE

1) Studiare la funzione, senza l'uso della derivata seconda:

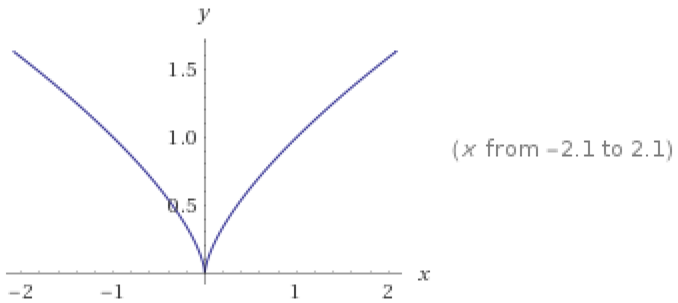
$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$$

$C.E.\, x \in \mathbb{R}$, inoltre $f(0) = 0$, $f(-x) = f(x)$ funzione pari, la studio in $[0, +\infty)$

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^2} = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x}} = 0$, no asintoti orizzontale e obliquo

$f'(x) = D\left(x^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} > 0$ in $(0, +\infty)$. La derivata non esiste in $x = 0$

$\lim_{x\to0^+} \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = +\infty$ in $x = 0^+$ si ha un punto a tangenza verticale



2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to0^+} x \ln x$$

$$\lim_{x\to0^+} \overset{\to 0^+}{x}\ \overbrace{\ln x}^{\to -\infty} = \lim_{x\to0^+} \frac{\overbrace{\ln x}^{\to -\infty}}{\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to +\infty}} \overset{H}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0^+} -\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to0^+} -x = 0$$

Riportare solo i passaggi essenziali

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}-2x}{x+2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}-2x}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1-4x^2}{(x+2)(\sqrt{x^2-1}+2x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1-3x^2}{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+2)}=\frac{-3}{3}=-1$$

4) Determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua nel dominio indicato

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sqrt{a} & \text{se } x<2 \\ 2x & \text{se } x\geq 2 \end{cases}$$

$$f(2)=4=\lim_{x\to 2^-} x^2\sqrt{a}\ =4\sqrt{a}\Rightarrow 4\sqrt{a}=4\Rightarrow\sqrt{a}=1\Rightarrow a=1$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Rolle alla funzione

$$f(x)=-x^3\ +\ 4x\ +\ 1$$

nell'intervallo [0, 2].

$f(x)$ è continua in $[0,2]$, inoltre $f(0)=1$ e $f(2)=1$

$f'(x)=-3x^2+4$ derivabile in $(0,2)$

Tutte le ipotesi del teorema sono verificate. Applichiamo la tesi:

$$-3x^2+4=0\Rightarrow x^2=\frac{4}{3}\Rightarrow x=< \begin{matrix} -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ +\frac{2}{\sqrt{3}} \end{matrix}$$

Riportare solo i passaggi essenziali

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$$

Si procede per parti

$$\int \; x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + c$$

$$\int_0^{\pi} x\cos x\,dx = [x\,sin\,x + cos\,x]_0^{\pi} = \pi\sin\pi + \cos\pi - 0\sin 0 - \cos 0 = 0 - 1 - 0 - 1 = -2$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{x}{\cos^2 x^2}\,dx$$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\cos^2 x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{\cos^2 x^2} = \frac{1}{2}\tan x^2 + c$$

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{x}{\cos^2 x^2}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}-\epsilon}} \frac{x}{\cos^2 x^2}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\,[\tan x^2]_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}-\epsilon}} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\underbrace{\tan\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}-\epsilon}\right)^2}_{\to+\infty} - \tan 0 = +\infty$$

Ossia non converge.

<u>Riportare solo i passaggi essenziali</u>

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n!\, x^n$$

Criterio del rapporto: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)!}{n!} = \lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty \Rightarrow R = 0$

9) Calcolare il polinomio di Mac Laurin di ordine 2 della seguente funzione:

$$f(x) = \ln(x^2 - 2x + 1)$$

$f(x) = \ln(x^2 - 2x + 1) \Rightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = \dfrac{2x - 2}{x^2 - 2x + 1} \Rightarrow f'(0) = -2$

$f''(x) = \dfrac{2(x^2 - 2x + 1) - (2x - 2)^2}{(x^2 - 2x + 1)^2} \Rightarrow f''(0) = \dfrac{2 - 4}{1} = -2$

E il polinomio risultante è: $P_1^2(x) = -2x - 2\dfrac{x^2}{2!} = -2x - x^2$

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ x + 3y + z = 4 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 + R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ da cui si ottiene:

$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ -2y = -1 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 - y - z \\ y = \frac{1}{2} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 - \frac{1}{2} - z \\ y = \frac{1}{2} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} - z \\ y = \frac{1}{2} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$ Soluzione generale $\left(\frac{5}{2} - z, \frac{1}{2}, z\right)$

Riportare solo i passaggi essenziali