MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina)   II SESSIONE INVERNALE 2018/19

MATR.___________ COGNOME________________ NOME_________________

TEMA B

I PARTE

---

1) Studiare la funzione, senza l'uso della derivata seconda:

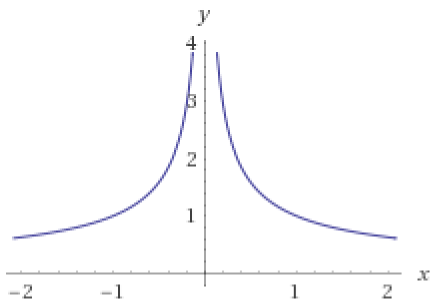
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$C.E.\, x\in\mathbb{R}-\{0\}$, $f(-x)=f(x)$ funzione pari, la studio in $(0,+\infty)$

$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=+\infty$; asintoto verticale

$\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=0$ asintoto orizzontale

$f'(x)=D\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)=-\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}-1}=-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}<0$ in $(0,+\infty)$ dove la funzione è decrescente.



(x from −2.1 to 2.1)

2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{x}^{\to+\infty}}{\underbrace{\ln x^2}_{\to+\infty}}\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{2x}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=+\infty$$

Riportare solo i passaggi essenziali

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}$$

4) Determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua nel dominio indicato

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln(a) & \text{se } x < 2 \\ 2x & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

$$f(2) = 4 = \lim_{x\to 2^-} x^2 \ln(a) = 4\ln(a) \Rightarrow 4\ln(a) = 4 \Rightarrow \ln(a) = 1 \Rightarrow a = 0$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Rolle alla funzione

$$f(x) = x^2 + 3x + 2$$

nell'intervallo [-2, -1].

$f(x)$ è continua in $[-2,-1]$, inoltre $f(-2) = 0 = f(2)$

$f'(x) = 2x + 3$ derivabile in $(-2,-1)$

Tutte le ipotesi del teorema sono verificate. Applichiamo la tesi:

$2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

Riportare solo i passaggi essenziali

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^1 \frac{x}{\cos^2 x} dx$$

Si procede per parti

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \tan x - \int \tan x \, dx = x \tan x - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = x \tan x + \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} =$$

$$= x \tan x + \ln(\cos x) + c$$

$$\int_0^1 \frac{x}{\cos^2 x} dx = [x \tan x + \ln(\cos x)]_0^1 = \tan 1 + \ln(\cos 1)$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_2^{+\infty} (x-1) \ e^{-x^2+2x} \, dx$$

poniamo $t = -x^2 + 2x \Rightarrow dt = (-2x+2)dx = -2(x-1)dx$ da cui $(x-1)dx = -\frac{dt}{2}$

$$\int (x-1) \ e^{-x^2+2x} \, dx = -\frac{1}{2} \int e^t dt = -\frac{1}{2} e^t + c = -\frac{1}{2} e^{-x^2+2x} + c \text{ da cui}$$

$$\int_2^{+\infty} (x-1) \, e^{-x^2+2x} \, dx = \lim_{n \to +\infty} \int_2^n (x-1) \, e^{-x^2+2x} \, dx = \lim_{n \to +\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2+2x} \right]_2^n =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} -\frac{1}{2} e^{-n^2+2n} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Ossia non converge.

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^n x^n$$

Criterio della radice: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty \Rightarrow R = 0$

9) Calcolare il polinomio di Mac Laurin di ordine 2 della seguente funzione:

$$f(x) = e^{\sin x}$$

$f(x) = e^{\sin x} \Rightarrow f(0) = 1$

$f'(x) = \cos x\, e^{\sin x} \Rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x\, e^{\sin x} + \cos^2 x\, e^{\sin x} \Rightarrow f''(0) = 1$

E il polinomio risultante è: $P_1^2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} = 1 + x + \frac{x^2}{2}$

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} -x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2+R_1 \\ R_3+R_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \circlearrowright R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ da cui si ottiene:

$\begin{cases} -x + y + z = 1 \\ 2y = 2 \\ 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x = 1 - y - z \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$ Soluzione generale (1,1,1)

Riportare solo i passaggi essenziali