MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina)   III SESSIONE INVERNALE 2018/19

MATR.__________ COGNOME______________ NOME_______________

TEMA A

I PARTE

1) Studiare la funzione, senza l'uso della derivata seconda:

$$f(x) = \frac{e^{x^2}}{x}$$

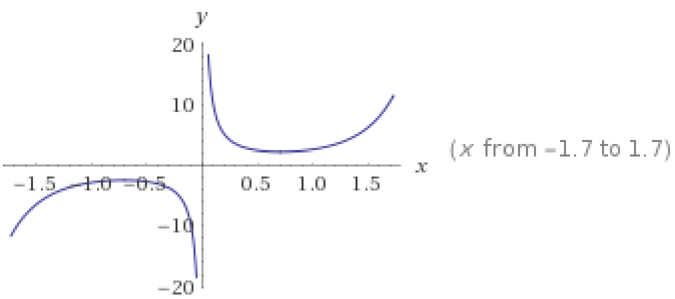
$C.E. x \in \mathbb{R}/\{0\},\ f(-x) = -f(x)$ funzione dispari, la studio in $(0, +\infty)$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2}}{x} = +\infty$; Asintoto verticale

$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{x^2}}{x} = +\infty$, no asintoti orizzontale e obliquo

$f'(x) = \frac{2x^2e^{x^2} - e^{x^2}}{x^2} = e^{x^2}\frac{2x^2-1}{x^2} > 0$ in $(0,+\infty)$ se $2x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$ e quindi in $(0,\infty)$

per $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow f(x)$ decresce, in $x > \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow f(x)$ cresce, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ minimo in $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2e}$



2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x + \log x}{2x + 1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{3x + \log x}^{\to+\infty}}{\underbrace{2x+1}_{\to+\infty}} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{2} = \frac{3}{2}$$

Riportare solo i passaggi essenziali

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\sin x}{1+x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\sin x}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{x}{1+x^2}}_{\to 0} \underbrace{\sin x}_{\text{limitata}} = 0$$

4) Determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua nel dominio indicato

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{se } x < 2 \\ \frac{1}{2}x & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

$$f(2) = 1 = \lim_{x\to 2^-} e^{ax} = e^{2a} \Rightarrow e^{2a} = 1 \Rightarrow e^{2a} = e^0 \Rightarrow a = 0$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Lagrange alla funzione

$$f(x) = -x^3 + 4x + 1$$

nell'intervallo [0, 1].

$f(x)$ è continua in $[0,1]$, inoltre $f(0) = 1$ e $f(1) = 4$

$f'(x) = -3x^2 + 4$ derivabile in $(0,1)$

Tutte le ipotesi del teorema sono verificate. Applichiamo la tesi:

$$\frac{4-1}{1} = -3x^2 + 4 \Rightarrow -3x^2 + 4 = 3 \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \prec \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{3}} \; Acc. \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \; N.A. \end{array}$$

Riportare solo i passaggi essenziali

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^1 x\log(1+x^2)\,dx$$

Si procede per sostituzione e poi per parti

Poniamo $t = 1 + x^2$, da cui $dt = 2xdx \Rightarrow xdx = \frac{dt}{2} \Rightarrow \int \ x\log(1+x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int \log t\,dt =$

$$= \frac{1}{2}\left[t\log t - \int \frac{t}{t}dt\right] = \frac{1}{2}[t\log t - t] + c = \frac{1}{2}[(1+x^2)\log(1+x^2) - (1+x^2)] + c$$

$$\int_0^1 x\log(1+x^2)\,dx = \frac{1}{2}[(1+x^2)\log(1+x^2) - (1+x^2)]_0^1 = \frac{1}{2}[2\log 2 - 2 - 0 + 1] =$$

$$= \frac{1}{2}(2\log 2 - 1) = \log 2\ - \frac{1}{2}$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}\,dx$$

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}dx = \int \sqrt{x-1}dx = \int \sqrt{x-1}\,d(x-1) = \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1} + c$$

$$\int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{1+\epsilon}^2 \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1}\right]_{1+\epsilon}^2 = \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{2}{3} - \underbrace{\frac{2}{3}\epsilon\sqrt{\epsilon}}_{\to 0} = \frac{2}{3}$$

Ossia converge.

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze (senza studiare gli estremi dell'intervallo di convergenza):

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$$

Criterio del rapporto: $\lim_{n\to+\infty} \frac{\left((n+1)!\right)^2}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2 (n!)^2 (2n)!}{(n!)^2 (2n+1)(2n+2)(2n)!} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow R = 4 \text{ con I.C.} (-4, 4)$

9) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 2, nel punto *c=1*, della seguente funzione:

$$f(x) = x\sqrt{x}$$

$f(x) = x\sqrt{x} \Rightarrow f(1) = 1$

$f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{2x + x}{2\sqrt{x}} = \frac{3x}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1) = \frac{3}{2}$

$f''(x) = \frac{6\sqrt{x} - 3x\frac{2}{2\sqrt{x}}}{4x} = \frac{6\sqrt{x} - \frac{3x}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{6x - 3x}{4x\sqrt{x}} = \frac{3}{4\sqrt{x}} \Rightarrow f''(1) = \frac{3}{4}$

E il polinomio risultante è: $P_1^2(x) = 1 + \frac{3}{2}(x-1) + \frac{3}{4}\frac{(x-1)^2}{2} = 1 + \frac{3}{2}(x-1) + \frac{3}{8}(x-1)^2$

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ -x + y + z = 1 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 + R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ da cui si ottiene:

$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2y = 1 \\ 2z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + y - z \\ y = \frac{1}{2} \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + \frac{1}{2} - 2 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = 2 \end{cases}$ Soluzione generale $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$

Riportare solo i passaggi essenziali