MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) SESSIONE APRILE 2018/19

MATR.___________ COGNOME_______________ NOME________________

TEMA A

I PARTE

1) Studiare la funzione, senza l'uso della derivata seconda:

$$f(x)=\frac{e^{x^2}}{x}$$

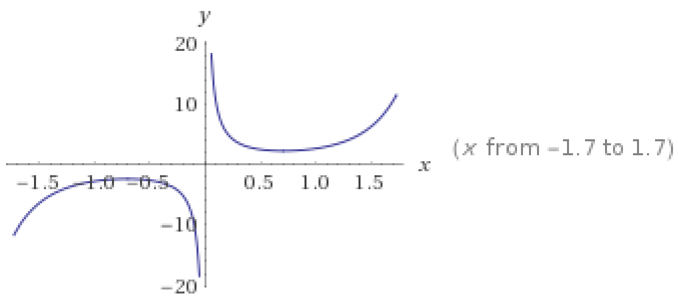
$C.E.\, x\in\mathbb{R}/\{0\},\ f(-x)=-f(x)$ funzione dispari, la studio in $(0,+\infty)$

$\lim_{x\to0^+}\frac{e^{x^2}}{x}=+\infty$; Asintoto verticale

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{x}=+\infty$, no asintoti orizzontale e obliquo

$f'(x)=\frac{2x^2e^{x^2}-e^{x^2}}{x^2}=e^{x^2}\frac{2x^2-1}{x^2}>0$ in $(0,+\infty)$ se $2x^2-1\geq0\Rightarrow x^2=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$ e quindi in $(0,\infty)$

per $0<x<\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow f(x)$ decresce, in $x>\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow f(x)$ cresce, $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ minimo in $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2e}$



2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{x}^{\to+\infty}}{\underbrace{\ln x^2}_{\to+\infty}}\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{2x}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=+\infty$$

<u>**Riportare solo i passaggi essenziali**</u>

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\log(1+x)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\log(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\frac{\log(1+x)}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\log(1+x)^{\frac{1}{x}}} = 1$$

4) Determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua nel dominio indicato

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sqrt{a} & \text{se } x < 2 \\ 2x & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

$$f(2) = 4 = \lim_{x\to 2^-} x^2\sqrt{a} = 4\sqrt{a} \Rightarrow 4\sqrt{a} = 4 \Rightarrow \sqrt{a} = 1 \Rightarrow a = 1$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Lagrange alla funzione

$$f(x) = \ln(x^2)$$

nell'intervallo [1,e]

$f(x)$ è continua in $[1, e]$, inoltre $f(1) = 0, f(e) = 2$

$f'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$ evidentemente derivabile in $(1, e)$,

applico Lagrange

$$\frac{2-0}{e-1} = \frac{2}{x} \Rightarrow \frac{2}{e-1} = \frac{2}{x} \Rightarrow \frac{1}{e-1} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = e-1$$

Riportare solo i passaggi essenziali

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_1^2 \sqrt{x-1}dx$$

Si fa la posizione $x-1=t \Rightarrow dx=dt$

$$\int \sqrt{x-1}\,dx = \int \sqrt{t}dt = \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{\sqrt{t^3}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}t\sqrt{t} + c = \frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1} + c$$

$$\int_1^2 \sqrt{x-1}dx = \frac{2}{3}\left[(x-1)\sqrt{x-1}\right]_1^2 = \frac{2}{3}$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_0^1 \frac{1-3x}{\sqrt{x}}dx$$

$$\int \frac{1-3x}{\sqrt{x}}dx = \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 3\sqrt{x}\right)dx = \int \left(x^{-\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}}\right)dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - 3\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = 2\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} + c$$

$$\int_0^1 \frac{1-3x}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^1 \frac{1-3x}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[2\sqrt{x} - 2x\sqrt{x}\right]_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon\to 0^+} 2 - 2 - 2\sqrt{\epsilon} + 2\epsilon\sqrt{\epsilon} = 0$$

Ossia converge.

Riportare solo i passaggi essenziali

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n (x-1)^n$$

Applicando il criterio della radice si ottiene $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n} = 2$

da cui $R = \frac{1}{2}$ e poiché $c = 1$ ne consegue che l'I. C. è $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Valutiamo il comportamento agli estremi

Se $x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \left(\frac{1}{2} - 1\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ non converge

Se $x = \frac{3}{2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \left(\frac{3}{2} - 1\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 1$ che diverge

da cui, l'intervallo di convergenza è $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

9) Calcolare il polinomio di Mac Laurin di ordine 2 della seguente funzione:

$$f(x) = \ln(e^{3x-1})$$

$f(x) = \ln(e^{3x-1}) \Rightarrow f(0) = \ln(e^{-1}) = -1$

$f'(x) = \frac{3e^{3x-1}}{e^{3x-1}} = 3 \Rightarrow f'(0) = 3$

E il polinomio risultante è: $P_1^2(x) = -1 + 3x$

In alternativa basta ricordare che $\ln(e^{3x-1}) = 3x - 1$ e che quindi il polinomio di Mac Laurin

di ordine 2 è proprio l'esponente di e

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3+R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ da cui si ottiene:

(0,0,0)

Riportare solo i passaggi essenziali