MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) I, SESSIONE ESTIVA 2018/19

MATR.___________ COGNOME________________ NOME________________

## TEMA A

**I PARTE**

1) Studiare la funzione, senza l'uso della derivata seconda:

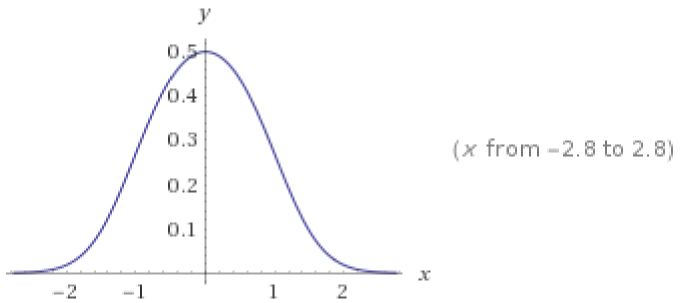
$$f(x) = \frac{1}{1+e^{x^2}}$$

$C.E.\, x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$ funzione pari, $f(0) = \frac{1}{2}$, la studio in $[0, +\infty)$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^{x^2}} = 0$, asintoto orizzontale

$f'(x) = \frac{-2xe^{x^2}}{(1+e^{x^2})^2} < 0$ in $(0, +\infty)$ e $f'(x) = 0$ in $x = 0$, punto di massimo $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

Data la simmetria sono presenti anche due flessi speculari rispetto l'asse delle ordinate.




2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+\log x}{2x+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{3x+\log x}^{\to+\infty}}{\underbrace{2x+1}_{\to+\infty}} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{2} = \frac{3}{2}$$



**<u>Riportare solo i passaggi essenziali</u>**

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x} = \lim_{x \to 0} 1 - \frac{\sin x}{x} = 0$$

4) Determinare $k \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua nel dominio indicato

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3k & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{k}{2} - x^2 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$$f(1) = 2 - 3k = \lim_{x \to 1^-} \frac{k}{2} - x^2 = \frac{k}{2} - 1 \Rightarrow 2 - 3k = \frac{k}{2} - 1 \Rightarrow \frac{k}{2} + 3k = 3 \Rightarrow \frac{k + 6k}{2} = 3 \Rightarrow k = \frac{6}{7}$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Rolle alla funzione

$$f(x) = e^{x^2 - 1}$$

nell'intervallo [-1,1]

$f(x)$ è continua in $[-1,1]$, inoltre $f(-1) = 1 = f(1)$

$$f'(x) = 2x\, e^{x^2 - 1} \text{ evidentemente derivabile in } (-1,1),$$

applico Rolle

$2x\, e^{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow x = 0$



**Riportare solo i passaggi essenziali**

**II PARTE**

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_1^2 \sqrt{x-1}dx$$

Si fa la posizione $x-1=t \Rightarrow dx=dt$

$$\int \sqrt{x-1}\,dx=\int \sqrt{t}dt=\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}=\frac{\sqrt{t^3}}{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{3}t\sqrt{t}+c=\frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1}+c$$

$$\int_1^2 \sqrt{x-1}dx=\frac{2}{3}\left[(x-1)\sqrt{x-1}\right]_1^2=\frac{2}{3}$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_0^2 \frac{2-x}{\sqrt{x}}dx$$

$$\int \frac{2-x}{\sqrt{x}}dx=\int\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)dx=\int\left(2x^{-\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)dx=2\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}-\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+c=4\sqrt{x}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+c$$

$$\int_0^2 \frac{2-x}{\sqrt{x}}dx=\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^2 \frac{2-x}{\sqrt{x}}dx=\lim_{\epsilon\to 0^+}\left[4\sqrt{x}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_\epsilon^2=\lim_{\epsilon\to 0^+}4\sqrt{2}-\frac{4}{3}\sqrt{2}-4\sqrt{\epsilon}+\frac{2}{3}\epsilon\sqrt{\epsilon}=$$

$$=4\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)=4\frac{2}{3}\sqrt{2}=\frac{8}{3}\sqrt{2}$$

Ossia converge.



**Riportare solo i passaggi essenziali**

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n!\, x^n$$

Criterio del rapporto: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)!}{n!} = \lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty \Rightarrow R = 0$

9) Calcolare il polinomio di Mac Laurin di ordine 2 della seguente funzione:

$$f(x) = e^{\sin x}$$

$f(x) = e^{\sin x} \Rightarrow f(0) = 1$

$f'(x) = \cos x\, e^{\sin x} \Rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x\, e^{\sin x} + \cos^2 x\, e^{\sin x} \Rightarrow f''(0) = 1$

E il polinomio risultante è: $P_1^2(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ -x + y + z = 1 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3+R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ da cui si ottiene:

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2y = 1 \\ 2z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + y - z \\ y = \dfrac{1}{2} \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + \dfrac{1}{2} - 2 \\ y = \dfrac{1}{2} \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{Soluzione generale } \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$$



**Riportare solo i passaggi essenziali**