MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) II SESSIONE ESTIVA 2018/19

MATR.__________ COGNOME______________ NOME_______________

TEMA A

I PARTE

1) Studiare la funzione, senza l'uso della derivata seconda:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

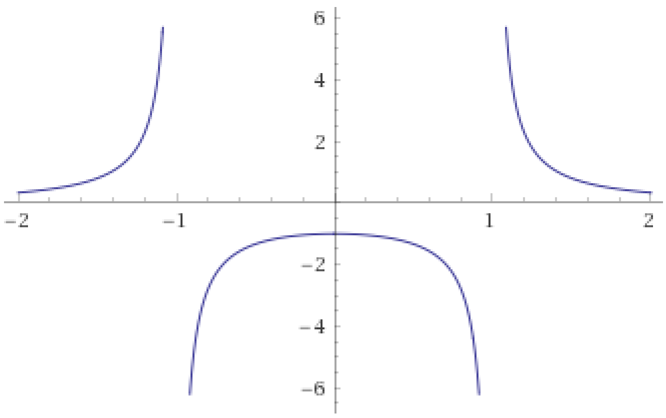
$C.E.\, x \in \mathbb{R}/\{\mp 1\},\ f(-x) = f(x)$ funzione pari, la studio in $(0,1) \cup (1,+\infty)$, inoltre $f(0) = -1$

$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x^2-1} = +\infty;$ Asintoto verticale sx

$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x^2-1} = -\infty;$ Asintoto verticale dx

$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2-1} = 0,$ asintoto orizzontale

$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-1)^2} < 0$ in $(0,1) \cup (1,+\infty)$ e quindi $f(x)$ decrescente in questo sottominio



2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\ln(x^2+1)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{x^2}^{\to 0}}{\underbrace{\ln(x^2+1)}_{\to 0}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\frac{2x}{x^2+1}} = \lim_{x\to 0} x^2 + 1 = 1$$

Riportare solo i passaggi essenziali

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x\sin x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x\sin x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{x^2\sin x}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}}_{\to e}\right]^{\overbrace{\frac{\sin x}{x}}^{\to 0}} = 1$$

4) Determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua nel dominio indicato

$$f(x) = \begin{cases} ax(2-x) & \text{se } x < 1 \\ ax & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(2) = a = \lim_{x\to1^-} ax(2-x) \quad = a \Rightarrow a = a \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Lagrange alla funzione

$$f(x) = \ln(x^2)$$

nell'intervallo [1,e]

$f(x)$ è continua in $[1,e]$, inoltre $f(1) = 0, f(e) = 2$

$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2} = \dfrac{2}{x}$ evidentemente derivabile in $(1,e)$,

applico Lagrange

$$\frac{2-0}{e-1} = \frac{2}{x} \Rightarrow \frac{2}{e-1} = \frac{2}{x} \Rightarrow \frac{1}{e-1} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = e-1$$

Riportare solo i passaggi essenziali

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^1 2xe^{-x}dx$$

$$\int 2xe^{-x}dx = 2\int xe^{-x}dx = 2\left(-xe^{-x} - \int -e^{-x}dx\right) = 2(-xe^{-x} - e^{-x}) + c = -2e^{-x}(x+1) + c$$

$$\int_0^1 2xe^{-x}dx = [-2e^{-x}(x+1)]_0^1 = -\frac{4}{e} + 2$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_0^1 \frac{1-3x}{\sqrt{x}}dx$$

$$\int \frac{1-3x}{\sqrt{x}}dx = \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 3\sqrt{x}\right)dx = \int \left(x^{-\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}}\right)dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - 3\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = 2\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} + c$$

$$\int_0^1 \frac{1-3x}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^1 \frac{1-3x}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[2\sqrt{x} - 2x\sqrt{x}\right]_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon\to 0^+} 2 - 2 - 2\sqrt{\epsilon} + 2\epsilon\sqrt{\epsilon} = 0$$

Ossia converge.

<u>Riportare solo i passaggi essenziali</u>

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n (x-1)^n$$

Applicando il criterio della radice si ottiene $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n} = 2$

da cui $R = \frac{1}{2}$ e poiché $c = 1$ ne consegue che l'I. C. è $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Valutiamo il comportamento agli estremi

Se $x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \left(\frac{1}{2} - 1\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ non converge

Se $x = \frac{3}{2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \left(\frac{3}{2} - 1\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 1$ che diverge

da cui, l'intervallo di convergenza è $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

9) Calcolare il polinomio di Mac Laurin di ordine 2 della seguente funzione:

$$f(x) = \ln(e^{3x-1})$$

$f(x) = \ln(e^{3x-1}) \Rightarrow f(0) = \ln(e^{-1}) = -1$

$f'(x) = \frac{3e^{3x-1}}{e^{3x-1}} = 3 \Rightarrow f'(0) = 3$

E il polinomio risultante è: $P_1^2(x) = -1 + 3x$

In alternativa basta ricordare che $\ln(e^{3x-1}) = 3x - 1$ e che quindi il polinomio di Mac Laurin

di ordine 2 è proprio l'esponente di e

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3+R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ da cui si ottiene:

(0,0,0)

Riportare solo i passaggi essenziali