MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) III SESSIONE ESTIVA 2018/19

MATR.__________ COGNOME______________ NOME_______________

TEMA A

I PARTE

1) Studiare la funzione, senza l'uso della derivata seconda:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

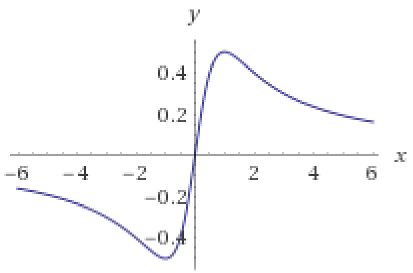
$C.E.\, x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$ funzione dispari, la studio in $[0, +\infty)$, inoltre $f(0) = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0, \text{asintoto orizzontale}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+1-x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} \geq 0 \Rightarrow -x^2+1 \geq 0 \Rightarrow x^2-1 \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -1 \leq x \leq 1 \text{ la } f(x) \text{ è crescente e in } \left(1, \frac{1}{2}\right) \text{ ha un massimo, inoltre } f'(0) = 1$$

Data la simmetria della funzione e gli asintoti orizzontali si ha sicuramente un punto di flesso dopo il punto di massimo e prima del punto di minimo.



(x from −6 to 6)

2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x - \sin x}{2x + \tan x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{3x - \sin x}^{\to 0}}{\underbrace{2x + \tan x}_{\to 0}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3 - \cos x}{2 + \frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{3-1}{2+1} = \frac{2}{3}$$

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{(x^2 - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(x + 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{(x + 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{4}$$

4) Determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua nel dominio indicato

$$f(x) = \begin{cases} x \ln a & \text{se } x < 1 \\ x + 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(1) = 2 = \lim_{x \to 1^-} x \ln a \ = \ln a \Rightarrow \ln a = 2 \Rightarrow a = e^2$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Rolle alla funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

nell'intervallo [-1, 1]

$f(x)$ è continua in $[-1, 1]$, inoltre $f(-1) = f(1) = \frac{1}{2}$

$f'(x) = \frac{2x(x^2 + 1) - x^2(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$ evidentemente derivabile in $(-1, 1)$,

applico Rolle

$2x = 0 \Rightarrow x = 0$

Riportare solo i passaggi essenziali

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_2^3 \frac{x^2-1+\ln(x-1)}{x-1}\,dx$$

$$\int \frac{x^2-1+\ln(x-1)}{x-1}dx = \int \frac{x^2-1}{x-1}dx + \int \frac{\ln(x-1)}{x-1}dx = \int x+1\,dx + \int \frac{\ln(x-1)}{x-1}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}+x+\int \underbrace{\frac{t}{e^t}e^t dt}_{\substack{\text{ponendo}\\ \ln(x-1)=t\\ x-1=e^t\\ dx=e^t dt}} = \frac{x^2}{2}+x+\int t\,dt = \frac{x^2}{2}+x+\frac{t^2}{2}+c = \frac{x^2}{2}+x+\frac{\ln^2(x-1)}{2}+c$$

$$\int_2^3 \frac{x^2-1+\ln(x-1)}{x-1}\,dx = \left[\frac{x^2}{2}+x+\frac{\ln^2(x-1)}{2}\right]_2^3 = \frac{9}{2}+3+\frac{\ln^2 2}{2}-2-2-0 = \frac{7}{2}+\frac{\ln^2 2}{2}$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+3x)^7}dx$$

$$\underbrace{\int \frac{1}{(1+3x)^7}dx}_{\substack{\text{ponendo}\\ 1+3x=t\\ 3dx=dt}} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t^7}dt = \frac{1}{3}\int t^{-7}\,dt = \frac{1}{3}\frac{t^{-6}}{-6}+c = -\frac{1}{18\,t^6}+c = -\frac{1}{18(1+3x)^6}+c$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+3x)^7}dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^n \frac{1}{(1+3x)^7}dx = \lim_{n\to+\infty}\left[-\frac{1}{18(1+3x)^6}\right]_0^n =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{18(1+3n)^6}+\frac{1}{18} = \frac{1}{18}$$

Ossia converge.

<u>Riportare solo i passaggi essenziali</u>

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n^2+2)2^n}$$

Applicando il crit. del rapporto si ottiene $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n^2+2)2^n}{((n+1)^2+2)2^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n^2+2)}{((n+1)^2+2)} \frac{2^n}{2\cdot 2^n} = \frac{1}{2}$

da cui $R = 2$ e poiché $c = 0$ ne consegue che l'I. C. è $(-2,2)$.

Valutiamo il comportamento agli estremi

Se $x = 2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{(n^2+2)2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+2}$ che converge $\left(\text{basta confrontarla con la } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\right)$

Se $x = -2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{(n^2+2)2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^2}{(n^2+2)}$ assolutamente convergente e quindi convergente

da cui, l'intervallo di convergenza è $[-2, 2]$.

9) Calcolare il polinomio di Mac Laurin di ordine 2 della seguente funzione:

$$f(x) = 1 + \arctan x$$

$f(x) = 1 + \arctan x \Rightarrow f(0) = 1$

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f'(0) = 1$

$f''^{(x)} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f''(0) = 0$

E il polinomio risultante è: $P_0^2(x) = 1 + x$

10) Trovare, se esiste, la matrice inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-R_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{ da cui } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$