MATEMATICA (V. Lacagnina) I SESSIONE INVERNALE 2018/19

MATR.__________ COGNOME______________ NOME_______________

TEMA A

I PARTE

---

1) Studiare il campo di esistenza della funzione, fare la derivata e studiarne il campo di esistenza:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x}$$

$x^2 - x \geq 0 \Rightarrow x(x-1) \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \vee x \geq 1$

$f'(x) = \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} \quad \text{con } x < 0 \vee x > 1$

2) Calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{e^x - 1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\sin x}^{\to 0}}{\underbrace{e^x - 1}_{\to 0}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{e^x} = 1$$

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 4x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 4x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x-4)}{x} = \lim_{x\to 0} x - 4 = -4$$

Riportare solo i passaggi essenziali

4) Determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua nel dominio indicato

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x} & \text{se } x \geq 1 \\ a^2 x & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$f(1) = a = \lim\limits_{x \to 1^-} a^2 x = a^2 \Rightarrow a = a^2 \Rightarrow a^2 - a = 0 \Rightarrow a(a-1) = 0 \Rightarrow a = 0 \vee a = 1$

5) Data la seguente funzione:

$$f(x) = (x^2 + 1)^2$$

trovare l'equazione della retta tangente in $x_0 = 1$

$f(1) = 4$
$f'(x) = 2(x^2 + 1)2x = 4x(x^2 + 1)$ da cui il coefficiente angolare è $f'(1) = 8$
da cui l'equazione della retta tangente è

$$y - 4 = 8(x - 1) \text{ ossia } y = 8x - 4$$

6) Risolvere la seguente equazione:

$$3(\ln x)^2 - 2\ln x - 1 = 0$$

Poniamo $\ln x = t$, l'equazione diventa $3t^2 - 2t - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 + 12 = 16 \Rightarrow t = \frac{2 \mp 4}{6} < \begin{matrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{matrix}$ da cui:

$\ln x = -\frac{1}{3}$ ossia $x = e^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$
$\ln x = 1$ ossia $x = e$

7) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Lagrange alla funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{2}$$

nell'intervallo [0, 2].

$f(x)$ è continua in $[0, 2]$, inoltre $f(0) = 1$ e $f(2) = 3$

$f'(x) = \frac{2x}{2} = x$ derivabile in $(0, 2)$

Tutte le ipotesi del teorema sono verificate. Applichiamo la tesi:

$\frac{3-1}{2-0} = x \Rightarrow x = 1$

8) Discutere il seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \\ 4x + z = 0 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-4R_1]{R_2-3R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ da cui si ottiene:

$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 4y + 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{5}{4}z - z = 0 \\ y = -\frac{5}{4}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{4}z \\ y = -\frac{5}{4}z \end{cases} \Rightarrow$

Soluzione generale $\left(-\frac{1}{4}z, -\frac{5}{4}z, z\right)$

9) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} -x + y + z = 2 \\ x - y = -1 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3+R_1]{R_2+R_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 scambia R_2]{} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ da cui si ottiene:

$\begin{cases} -x + y + z = 2 \\ -y - z = 2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y + z = 2 \\ -y = 2 + 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x - 3 + 1 = 2 \\ y = -3 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \\ z = 1 \end{cases}$

Soluzione generale $(-4, -3, 1)$

10) Trovare, se esiste, la matrice inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \; \vdots \; \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \xrightarrow[R_2-R_1]{} \left(\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \; \vdots \; \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \xrightarrow[\frac{R_2}{-3}]{} \left(\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \; \vdots \; \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \to$$

$$\xrightarrow[R_1-2R_1]{} \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \; \vdots \; \begin{matrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \text{ da cui } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11) Risolvere la seguente equazione matriciale:

$-X + 2(A - X) + B + 2(C + 2X) = \underline{0} \qquad con\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$-X + 2A - 2X + B + 2C + 4X = \underline{0} \Rightarrow X = -2A - B - 2C = -2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+1-2 & 2-1+2 \\ 2+0+0 & 0-1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

12) Individuare il valore del parametro *h* affinché la matrice abbia determinante non nullo:
$\begin{pmatrix} h & 1 \\ h & h \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} h & 1 \\ h & h \end{vmatrix} = h^2 - h = h(h-1) \neq 0 \text{ se } h \neq 0 \vee h \neq 1$