MATEMATICA (V. Lacagnina) I SESSIONE INVERNALE 2018/19

MATR.__________ COGNOME______________ NOME_______________

TEMA A

I PARTE

1) Studiare il campo di esistenza della funzione, fare la derivata e studiarne il campo di esistenza:

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

$x \neq 0$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} \text{ con } x \neq 0$

2) Calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{e^x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{\ln x}^{\to+\infty}}{\underbrace{e^x}_{\to+\infty}} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{xe^x} = 0$$

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x} - x}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x} - x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 = -1$$

Riportare solo i passaggi essenziali

4) Determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua nel dominio indicato

$$f(x) = \begin{cases} (a^2-2)x^2 & \text{se } x \geq 1 \\ ax & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$$f(1) = a^2 - 2 = \lim_{x \to 1^-} ax = a \Rightarrow a = a^2 - 2 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 8 = 9; a = \frac{1 \mp 3}{2} < \begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix}$$

5) Data la seguente funzione:

$$f(x) = e^{x^2}$$

trovare l'equazione della retta tangente in $x_0 = 1$

$f(1) = e$

$f'(x) = 2xe^x$ da cui il coefficiente angolare è $f'(1) = 2e$

da cui l'equazione della retta tangente è

$$y - e = 2e(x-1) \ \text{ ossia } y = 2ex - e$$

6) Risolvere la seguente equazione:

$$3^{2x} - 3^x - 6 = 0$$

Poniamo $3^x = t$, l'equazione diventa $t^2 - t - 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 24 = 25 \Rightarrow t = \frac{1 \mp 5}{2} < \begin{matrix} -2 \\ 3 \end{matrix}$ da cui:

$3^x = -2$ impossibile

$3^x = 3$ ossia $x = 1$

II PARTE

7) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Rolle alla funzione

$$f(x) = -x^3 + 4x + 1$$

nell'intervallo [0, 2].

$f(x)$ è continua in $[0, 2]$, inoltre $f(0) = 1$ e $f(2) = 1$

$f'(x) = -3x^2 + 4$ derivabile in $(0, 2)$

Tutte le ipotesi del teorema sono verificate. Applichiamo la tesi:

$$-3x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x =< \begin{matrix} -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ +\frac{2}{\sqrt{3}} \end{matrix}$$

8) Discutere il seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2-R_1 \\ R_3-R_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ da cui si ottiene:}$$

L'unica soluzione possibile è $x = y = z = 0$

Soluzione (0,0,0)

9) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} -x + y + z = 1 \\ x - y = -1 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2+R_1 \\ R_3+R_1}]{} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 scambia R_2]{} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ da cui si ottiene:}$$

$$\begin{cases} -x + y + z = 1 \\ -y - z = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 1 \\ -y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x - 1 = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Soluzione generale $(-2, -1, 0)$

Riportare solo i passaggi essenziali

10) Trovare, se esiste, la matrice inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

11) Risolvere la seguente equazione matriciale:

$X + A - B - 1(C + 2X) = \underline{0} \qquad con\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$X + A - B - C - 2X = \underline{0} \Rightarrow X = A - B - C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2 - 1 & 0 - 1 - 1 \\ 0 + 1 - 1 & 2 + 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

12) Individuare il valore del parametro *h* affinché la matrice abbia determinante non nullo:

$\begin{pmatrix} h & 1 \\ 4 & h \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} h & 1 \\ 4 & h \end{vmatrix} = h^2 - 4 \neq 0$ se $h \neq \mp 2$

Riportare solo i passaggi essenziali