MATEMATICA (V. Lacagnina) III SESSIONE INVERNALE 2018/19

MATR.__________ COGNOME______________ NOME_______________

TEMA A

I PARTE

---

1) Studiare il campo di esistenza della funzione, fare la derivata e studiarne il campo di esistenza:

$$f(x) = \sqrt{x+1}$$

$x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ con $x > -1$

2) Calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\sin x}^{\to 0}}{\underbrace{x}_{\to 0}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x\to 1} x - 1 = 0$$

Riportare solo i passaggi essenziali

4) Determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua nel dominio indicato

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{se } x \geq 1 \\ a^2 x & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$$f(1) = 2 + a = \lim_{x \to 1^-} a^2 x = a^2 \Rightarrow 2 + a = a^2 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 8 = 9 \Rightarrow a = \frac{1 \mp 3}{2} =< \begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix}$$

5) Data la seguente funzione:

$$f(x) = x \log x$$

trovare l'equazione della retta tangente in $x_0 = 1$

$f(1) = 0$

$f'(x) = \log x + \frac{x}{x} = \log x + 1$ da cui il coefficiente angolare è $f'(1) = \log 1 + 1 = 1$

da cui l'equazione della retta tangente è

$$y - 0 = 1(x - 1) \text{ ossia } y = x - 1$$

6) Risolvere la seguente equazione:

$$3e^{2x} - 2e^x - 1 = 0$$

Poniamo $e^x = t$, l'equazione diventa $3t^2 - 2t - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 + 12 = 16 \Rightarrow t = \frac{2 \mp 4}{6} < \begin{matrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{matrix}$ da cui:

$e^x = -\frac{1}{3}$ impossibile

$e^x = 1$ ossia $x = 0$

7) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Lagrange alla funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 2}{2}$$

nell'intervallo [0, 2].

$f(x)$ è continua in $[0, 2]$, inoltre $f(0) = -1$ e $f(2) = 1$

$f'(x) = \frac{2x}{2} = x$ derivabile in $(0, 2)$

Tutte le ipotesi del teorema sono verificate. Applichiamo la tesi:

$\frac{1-(-1)}{2-0} = x \Rightarrow x = 1$

8) Discutere il seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3+R_1]{R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3+R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ da cui si ottiene:

$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow$

Soluzione generale $(0, z, z)$

9) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 scambia R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ da cui si ottiene:

$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -y = -1 \\ -z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 1 + 1 = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

Soluzione generale $(0,1,1)$

10) Trovare, se esiste, la matrice inversa:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2+R_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_1-3R_3 \\ R_2-3R_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[R_1(-1)]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{ da cui } A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11) Risolvere la seguente equazione matriciale:

$X + 2(A - X) + B + 2C = \underline{0} \qquad con\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$X + 2A - 2X + B + 2C = \underline{0} \Rightarrow X = 2A + B + 2C = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1+0 & 2+0+2 \\ 2+1+2 & 0+1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

12) Individuare il valore del parametro *h* affinché la matrice abbia determinante non nullo:

$\begin{pmatrix} h^2 & h \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} h^2 & h \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = h^2 + h = h(h+1) \neq 0 \text{ se } h \neq 0 \vee h \neq -1$