MATEMATICA (V. Lacagnina) SESSIONE APRILE 2018/19

MATR.___________ COGNOME________________ NOME_________________

TEMA A

I PARTE

1) Studiare il campo di esistenza della funzione, fare la derivata e studiarne il campo di esistenza:

$$f(x) = \ln(x^2 - 1)$$

$x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$ con $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

2) Calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{cos(x) - 1}^{\to 0}}{\underbrace{x^2}_{\to 0}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{2} = -\frac{1}{2}$$

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \text{limite notevole} = \lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Riportare solo i passaggi essenziali

4) Determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua nel dominio indicato

$$f(x) = \begin{cases} (a^2-1)x^2 & \text{se } x \geq 1 \\ (a+1)x & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$f(1) = a^2 - 1 = \lim_{x \to 1^-} (a+1)x = a+1 \Rightarrow a+1 = a^2-1 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1+8 = 9;$

$a = \dfrac{1 \mp 3}{2} < \begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix}$

5) Data la seguente funzione:

$$f(x) = \ln(x^3 + 3x + e)$$

trovare l'equazione della retta tangente in $x_0 = 0$

$f(0) = \ln e = 1$

$f'(x) = \dfrac{3x^2+3}{x^3+3x+e}$ da cui il coefficiente angolare è $f'(0) = \dfrac{3}{e}$

da cui l'equazione della retta tangente è

$$y - 1 = \frac{3}{e}x \text{ ossia } y = \frac{3}{e}x + 1$$

6) Risolvere la seguente equazione:

$$e^{2x} - e^x = 0$$

Poniamo $e^x = t$, l'equazione diventa $t^2 - t = 0 \Rightarrow t(t-1) = 0 \Rightarrow t =< \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$ da cui:

$e^x = 0$ impossibile

$e^x = 1$ ossia $x = 0$

II PARTE

7) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Rolle alla funzione

$$f(x) = x^2 + x - 2$$

nell'intervallo [-1,0].

$f(x)$ è continua in $[-1, 0]$, inoltre $f(-1) = -2$ e $f(0) = -2$

$f'(x) = 2x + 1$ derivabile in $(-1,0)$

Tutte le ipotesi del teorema sono verificate. Applichiamo la tesi:

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

8) Discutere il seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$ da cui si ottiene:

L'unica soluzione possibile è $x = y = z = 0$

Soluzione (0,0,0)

9) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y + z = 6 \\ 3x + y + 2z = 6 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -5 & -6 \\ 0 & -5 & -7 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - 5R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$ da cui si ottiene:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ y + 5z = +6 \\ 18z = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Soluzione generale (1,1,1)

Riportare solo i passaggi essenziali

10) Trovare, se esiste, la matrice inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-R_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(-1)R_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2-R_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

da cui $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

11) Risolvere la seguente equazione matriciale:

$3X + (A + X) - (B + A) - (C + 3X) = \underline{0} \qquad con\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$3X + A + X - B - A - C - 3X = \underline{0} \Rightarrow X - B - C = \underline{0} \Rightarrow X = B + C \Rightarrow$

$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2-1 \\ 1-1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

12) Individuare il valore del parametro *h* affinché la matrice abbia determinante non nullo:

$\begin{pmatrix} 1 & h \\ h^2 & h \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & h \\ h^2 & h \end{vmatrix} = h - h^3 \neq 0 \Rightarrow\ h(1 - h^2) \neq 0$ se $h \neq 0\ \vee h \neq \mp 1$

Riportare solo i passaggi essenziali