MATEMATICA (V. Lacagnina) II, SESSIONE ESTIVA 2018/19

MATR.__________ COGNOME______________ NOME_______________

$\boxed{\text{TEMA A}}$

I PARTE

---

1) Studiare il campo di esistenza della funzione, fare la derivata e studiarne il campo di esistenza:

$$f(x) = \ln(x^2 - x)$$

$x^2 - x > 0 \Rightarrow x(x-1) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

$f'(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x}$ con $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

2) Calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{2x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{cos(x) - 1}^{\to 0}}{2\underbrace{x^2}_{\to 0}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{-\sin x}^{\to 0}}{\underbrace{4x}_{\to 0}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{4} = -\frac{1}{4}$$

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x} = \text{limite notevole} = = e$$

Riportare solo i passaggi essenziali

4) Determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua nel dominio indicato

$$f(x) = \begin{cases} (a^2+2)x^2 & \text{se } x \geq 1 \\ 3ax & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$f(1) = a^2 + 2 = \lim_{x \to 1^-} 3ax = 3a \Rightarrow 3a = a^2 + 2 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 8 = 1;$

$a = \frac{3 \mp 1}{2} < \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$

5) Data la seguente funzione:

$$f(x) = \ln(x^3 + e)$$

trovare l'equazione della retta tangente in $x_0 = 0$

$f(0) = \ln e = 1$

$f'(x) = \frac{3x^2}{x^3 + e}$ da cui il coefficiente angolare è $f'(0) = 0$

da cui l'equazione della retta tangente è

$$y - 1 = 0 \cdot x \text{ ossia } y = 1$$

6) Risolvere la seguente equazione:

$$\ln^2 x - \ln(x) = 0$$

Poniamo $\ln x = t$, l'equazione diventa $t^2 - t = 0 \Rightarrow t(t-1) = 0 \Rightarrow t =< \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$ da cui:

$\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

$\ln x = 1 \Rightarrow x = e$

Riportare solo i passaggi essenziali

7) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Lagrange alla funzione

$$f(x) = x^2 + x - 2$$

nell'intervallo [0,1].

$f(x)$ è continua in $[0,1]$, inoltre $f(0) = -2$ e $f(1) = 0$

$f'(x) = 2x + 1$ derivabile in $(0,1)$

Tutte le ipotesi del teorema sono verificate. Applichiamo la tesi:

$$\frac{0-(-2)}{1-0} = 2 = 2x + 1 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

8) Discutere il seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \curvearrowright R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ da cui si ottiene:}$$

L'unica soluzione possibile è $x = y = z = 0$

Soluzione $(0,0,0)$

9) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y + z = 6 \\ 3x + y + 2z = 6 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2-2R_1 \\ R_3-3R_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -5 & -6 \\ 0 & -5 & -7 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-5R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 18 & 18 \end{pmatrix} \text{ da cui si ottiene:}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ y + 5z = +6 \\ 18z = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Soluzione generale $(1,1,1)$

<u>Riportare solo i passaggi essenziali</u>

10) Trovare, se esiste, la matrice inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-R_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(-1)R_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2-R_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

da cui $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

11) Risolvere la seguente equazione matriciale:

$3X + (A + X) - (B + A) - (C + 3X) = \underline{0} \qquad con\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$3X + A + X - B - A - C - 3X = \underline{0} \Rightarrow X - B - C = \underline{0} \Rightarrow X = B + C \Rightarrow$

$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2-1 \\ 1-1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

12) Individuare il valore del parametro *h* affinché la matrice abbia determinante non nullo:

$\begin{pmatrix} h & 1 \\ h^2 & h \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} h & 1 \\ h^2 & h \end{vmatrix} = h^2 - h^2 = 0\ \forall h \Rightarrow$ il determinante è sempre nullo