MATEMATICA (V. Lacagnina) III, SESSIONE ESTIVA 2018/19

MATR.__________ COGNOME______________ NOME_______________

TEMA A

I PARTE

---

1) Studiare il campo di esistenza della funzione, fare la derivata e studiarne il campo di esistenza:

$$f(x) = \frac{e^x}{x}$$

$x \neq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$f'(x) = \dfrac{xe^x - e^x}{x^2}$ con $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

2) Calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{1 - e^x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\overbrace{x}^{\to 0}}{\underbrace{1 - e^x}_{\to 0}} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{1}{-e^x} = -1$$

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + 2}{x^2 - 4}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + 2}{(x + 2)(x - 2)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x - 2} = 0$$

Riportare solo i passaggi essenziali

4) Determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua nel dominio indicato

$$f(x) = \begin{cases} a^2x^2 & \text{se } x \geq 1 \\ ax & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$$f(1) = a^2 = \lim_{x \to 1^-} ax = a \Rightarrow a^2 = a \Rightarrow a^2 - a = 0 \Rightarrow a(a-1) = 0;$$

$$a =< \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$$

5) Data la seguente funzione:

$$f(x) = e^{x^2}$$

trovare l'equazione della retta tangente in $x_0 = 1$

$f(1) = e$

$f'(x) = 2xe^{x^2}$ da cui il coefficiente angolare è $f'(1) = 2e$

da cui l'equazione della retta tangente è

$$y - e = 2e(x-1) \Rightarrow y = 2ex - 2e + e \Rightarrow y = 2ex - e$$

6) Risolvere la seguente equazione:

$$4(e^x)^2 - e^x = 0$$

Poniamo $e^x = t$, l'equazione diventa $4t^2 - t = 0 \Rightarrow t(4\mathrm{t} - 1) = 0 \Rightarrow t =< \begin{matrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{matrix}$ da cui:

$e^x = 0$ impossibile

$e^x = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \ln\frac{1}{4} = -\ln 4 = -2\ln 2$

<u>Riportare solo i passaggi essenziali</u>

7) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Rolle alla funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$$

nell'intervallo [-1, 1]

$f(x)$ è continua in $[-1,1]$, inoltre $f(-1) = f(1) = \frac{1}{2}$

$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - x^2(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$ evidentemente derivabile in $(-1,1)$,

applico Rolle $2x = 0 \Rightarrow x = 0$

8) Discutere il seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x+z=0 \\ y+z=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ da cui si ottiene:

$$\begin{cases} x+z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=-z \end{cases}$$

Soluzione $(-z,-z,z)$

9) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x+z=1 \\ y+z=1 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-5R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ chiaramente incompatibile

Non esiste soluzione

10) Trovare, se esiste, la matrice inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 - R_3]{R_1 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

da cui $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

11) Risolvere la seguente equazione matriciale:

$X + 2(A + X) - (B + A) - 2(C + X) = \underline{0}$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$X + 2A + 2X - B - A - 2C - 2X = \underline{0} \Rightarrow X + A - B - 2C = \underline{0} \Rightarrow X = -A + B + 2C \Rightarrow$

$\Rightarrow X = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0+2 & 0+1+2 \\ 0+1+2 & -1+0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

12) Individuare il valore del parametro *h* affinché la matrice abbia determinante non nullo:

$\begin{pmatrix} h & h^2 \\ h^2 & h \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} h & h^2 \\ h^2 & h \end{vmatrix} = h^2 - h^4 = 0 \Rightarrow h^2(1 - h^2) = 0 \Rightarrow h = 0, h = \mp 1\ \forall h \in \mathbb{R} - \{-1,0,1\}$

Riportare solo i passaggi essenziali