MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina)   I SESSIONE INVERNALE 2019/20

MATR.__________ COGNOME______________ NOME_______________

TEMA A

I PARTE

1) Studiare la funzione, senza l'uso della derivata seconda:

$$f(x) = (x^2 - x)e^x + 1$$

$C.E.\, x \in \mathbb{R}$, la funzione non è nè pari, nè dispari, $f(0) = 1$

$\lim_{x\to-\infty} (x^2 - x)e^x + 1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - x}{e^{-x}} + 1 = 1$ asintoto orizzontale

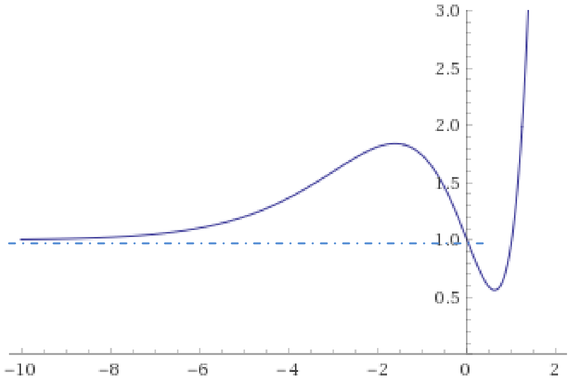
$\lim_{x\to+\infty} (x^2 - x)e^x + 1 = +\infty$, no asintoto orizzontale, no asintoto obliquo

$f'(x) = (2x - 1)e^x + (x^2 - x)e^x = e^x(x^2 + x - 1) \geq 0 \Rightarrow x^2 + x - 1 \geq 0, \Delta = 1 + 4 = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{-1 \mp \sqrt{5}}{2} < \begin{matrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{matrix} \Rightarrow x \leq \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \vee x \geq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ in esso la $f(x)$ è crescente e decrescente

in $x \in \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ con $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ massimo locale e $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ minimo locale

Data la presenza dell'asintoto orizzontale si ha sicuramente un punto di flesso prima del massimo e un altro tra il punto di massimo e quello di minimo.



2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to0} \frac{9\ln(1 + 2x)}{\sin(3x)}$$

$$\lim_{x\to0} \frac{\overbrace{9\ln(1 + 2x)}^{\to0}}{\underbrace{\sin(3x)}_{\to0}} \overset{H}{=} \lim_{x\to0} \frac{\frac{18}{1+2x}}{3\cos(3x)} = \frac{18}{3} = 6$$

Riportare solo i passaggi essenziali

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}=\lim_{x\to 4}\frac{2x+1-9}{x-2-2}\cdot\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x+1}+3}=\lim_{x\to 4}\frac{2x-8}{x-4}\cdot\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x+1}+3}=\lim_{x\to 4}2\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x+1}+3}=$$
$$=2\frac{2\sqrt{2}}{6}=\frac{2}{3}\sqrt{2}$$

4) Determinare $a\in\mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua nel dominio indicato

$$f(x)=\begin{cases}ax & \text{se } x>1\\ 2 & \text{se } x=1\\ 3ax^2-4 & \text{se } x<1\end{cases}$$

$f(1)=2;\ \lim_{x\to 1^+}ax=a=2,$ inoltre: $\lim_{x\to 1^-}3ax^2-4=3a-4=2\Rightarrow a=\frac{6}{3}=2$

Quindi se $a=2$ la funzione risulta continua in tutti i reali.

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Lagrange alla funzione

$$f(x)=(x+|x|)\ln x^2$$

nell'intervallo $[1,e]$

Considerando l'intervallo $[1,e]$, si noti che $f(x)=2x\ln x^2$ è in esso sicuramente continua

con $f(1)=0$ e $f(e)=2e\ln e^2=4e$

$f'(x)=D[2x\ln x^2]=2\ln x^2+2x\frac{2x}{x^2}=2\ln x^2+4$ evidentemente derivabile in $\left[1,\sqrt{e}\right]$,

applico Lagrange

$$\frac{4e}{e-1}=2\ln x^2+4\Rightarrow\frac{4e}{e-1}=\underbrace{4\ln x}_{\text{dato che } x>0}+4\Rightarrow\frac{e}{e-1}=\ln x+1\Rightarrow\ln x=\frac{e-e+1}{e-1}=\frac{1}{e-1}\text{ da cui}$$

$x=e^{\frac{1}{e-1}}$

Riportare solo i passaggi essenziali

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_2^4 \frac{x^2-4}{x-1}dx$$

$$\int_2^4 \frac{x^2-4}{x-1}dx = \int_2^4 \frac{x^2-1-3}{x-1}dx = \int_2^4 \frac{(x-1)(x+1)-3}{x-1}dx = \int_2^4 x+1\,dx - 3\int_2^4 \frac{1}{x-1}dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}+x\right]_2^4 - 3\int_2^4 \frac{1}{x-1}d(x-1) = \left[\frac{x^2}{2}+x-3\ln|x-1|\right]_2^4 = \frac{16}{2}+4-3\ln 3-\frac{4}{2}-2+3\ln 1 =$$

$$= 8+4-2-2-3\ln 3 = 8-3\ln 3$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx$$

Si procede per parti: $\int x^2e^{-x}dx = -x^2e^{-x} - \int -2x\,e^{-x}dt = -x^2e^{-x} + 2\int x\,e^{-x}dt =$

$$= -x^2e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} - \int -e^{-x}dt\right) = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + c = -e^{-x}(x^2+2x+2)+c$$

A causa dell'estremo superiore di integrazione:

$$\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx = \lim_{N\to+\infty}\int_0^N x^2e^{-x}dx = \lim_{N\to+\infty}[-e^{-x}(x^2+2x+2)]_0^N =$$

$$= \lim_{N\to+\infty} -e^{-N}(N^2+2N+2)+e^0(2) = \lim_{N\to+\infty} -\frac{N^2+2N+2}{e^N}+2 = 0+2 = 2$$

Ossia converge.

Riportare solo i passaggi essenziali

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{n\, 2^n}$$

Applicando il criterio della radice si ottiene $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n\, 2^n}} = \frac{1}{2}$

da cui $R = 2$ e poiché $c = 1$ ne consegue che l'I.C. è $(-1, 3)$.

Valutiamo il comportamento agli estremi

Se $x = 3 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n\, 2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n}$ non converge (serie armonica)

Se $x = -1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n\, 2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ che converge (serie armonica a segni alterni)

da cui, l'intervallo di convergenza è $[-1,3)$.

9) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 2 nel punto $x = 1$ della seguente funzione:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f(1) = 1$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}$

$f''(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \Rightarrow f''(1) = -\frac{1}{4}$

E il polinomio risultante è: $P_1^2(x) = 1 + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{8}$

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y = 2 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 - R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 scambia R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ da cui si ottiene:

$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ y + z = 2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow$ Soluzione $(1, 1, 1)$

Riportare solo i passaggi essenziali