MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina)   I SESSIONE INVERNALE 2019/20

MATR.__________ COGNOME______________ NOME_______________

TEMA B

I PARTE

---

1) Studiare la funzione, senza l'uso della derivata seconda:

$$f(x) = x^2(\ln x - 1)$$

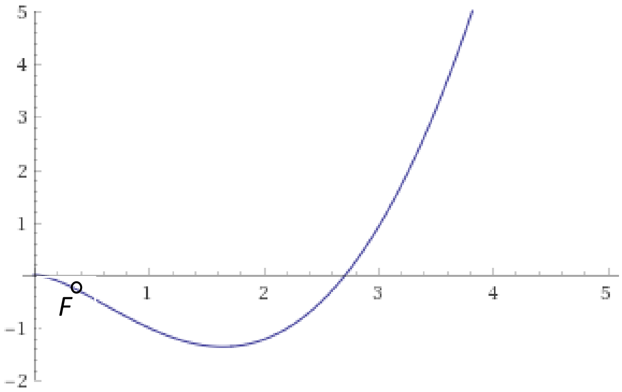
$C.E.\, x > 0$, $\lim_{x\to 0^+} \overbrace{x^2}^{\to 0} \underbrace{(\ln x - 1)}_{\to -\infty} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x - 1}{\frac{1}{x^2}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2}{2} = 0^-$

$\lim_{x\to +\infty} x^2(\ln x - 1) = +\infty$, no asintoto orizzontale, no asintoto obliquo

$f'(x) = 2x(\ln x - 1) + \frac{x^2}{x} = 2x(\ln x - 1) + x = x(2\ln x - 1) \geq 0 \Rightarrow 2\ln x - 1 \geq 0 \Rightarrow \ln x \geq \frac{1}{2}$ da cui

$x \geq e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \Rightarrow f(x)$ è decrescente in $(0, \sqrt{e})$ e crescente in $(\sqrt{e}, +\infty)$ con un minimo locale in $x = \sqrt{e}$

inoltre poiché $\lim_{x\to 0^+} x(2\ln x - 1) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\ln x - 1}{\frac{1}{x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -2x = 0$



si ha un flesso tra 0 e il minimo

2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\tan x + x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{2\tan x + x}^{\to 0}}{\underbrace{x}_{\to 0}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{\cos^2 x} + 1}{1} = 3$$

Riportare solo i passaggi essenziali

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\sin x}{x}}{\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2}$$

4) Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua nel dominio indicato

$$f(x) = \begin{cases} bx^2 - a & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$f(0) = 2;\ \lim_{x\to 0^\mp} bx^2 - a = -a = 2 \Rightarrow a = -2$

Quindi se $a = -2$ e $b \in \mathbb{R}$ la funzione risulta continua in tutti i reali.

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Rolle alla funzione

$$f(x) = e^{x^2 + ln(x^2+1)}$$

nell'intervallo $[-1, 1]$

Considerando l'intervallo $[-1, 1]$ $f(x) = e^{x^2}(x^2+1)$ è sicuramente continua

con $f(-1) = f(1) = 2e$

$f'(x) = D\left[e^{x^2}(x^2+1)\right] = 2xe^{x^2}(x^2+1) + e^{x^2}2x = 2xe^{x^2}(x^2+2)$ derivabile in $[-1, 1]$,

applico Rolle

$2xe^{x^2}(x^2+2) = 0$ da cui $x = 0$

<u>Riportare solo i passaggi essenziali</u>

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^2 \frac{\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}dx$$

ponendo $2x+1=t \Rightarrow 2dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt,\qquad$ inoltre $x=0 \Rightarrow t=1; x=2 \Rightarrow 5$

$$\int_0^2 \frac{\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int_1^5 \frac{\ln t}{t^2}dt = \frac{1}{2}\left(\left[-\frac{\ln t}{t}\right]_1^5 + \int_1^5 \frac{1}{t^2}dt\right) = \frac{1}{2}\left(\left[-\frac{\ln t}{t} - \frac{1}{t}\right]_1^5\right) = \frac{1}{2}\left(\left[-\frac{\ln t - 1}{t}\right]_1^5\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\ln 5 - 1}{5} + \frac{\ln 1 - 1}{1}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\ln 5 - 1}{5} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\ln 5 - 4}{5}\right) = \frac{1}{10}(4 - \ln 5)$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_4^{+\infty} \frac{x}{x^2-3}dx$$

Per la struttura dell'argomento si pone $t = x^2 - 3 \Rightarrow dt = 2xdx$ ossia $xdx = \frac{dt}{2}$

$$\int \frac{x}{x^2-3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt = \frac{1}{2}\ln|t| + c = \frac{1}{2}\ln|x^2-3| + c$$

A causa dell'estremo superiore di integrazione:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2-3}dx = \lim_{N\to+\infty}\int_0^N \frac{x}{x^2-3}dx = \frac{1}{2}\lim_{N\to+\infty}[\ln|x^2-3|]_0^N = \frac{1}{2}\lim_{N\to+\infty}\ln|N^2-3| - \ln 13 = +\infty$$

Ossia non converge.

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n (x-1)^n$$

Applicando il criterio della radice si ottiene $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{2^n} = 2$

da cui $R = \dfrac{1}{2}$ e poiché $c = 1$ ne consegue che l'I. C. è $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$.

Valutiamo il comportamento agli estremi

Se $x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \left(\frac{1}{2} - 1\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ non converge

Se $x = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \left(\frac{3}{2} - 1\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 1$ che diverge

da cui, l'intervallo di convergenza è $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

9) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 2 nel punto $x = 1$ della seguente funzione:

$$f(x) = \arctan x$$

$f(x) = \arctan x \Rightarrow f(1) = \dfrac{\pi}{4}$

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \Rightarrow f'(1) = \dfrac{1}{2}$

$f''(x) - \dfrac{2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f''(1) = -\dfrac{1}{2}$

E il polinomio risultante è: $P_1^2(x) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x-1}{2} + \dfrac{(x-1)^2}{4}$

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y = 2 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \text{ da cui:}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ y + z = 2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Soluzione } (1, 1, 1)$$