meMATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) II SESSIONE INVERNALE 2019/20

MATR.__________ COGNOME______________ NOME_______________

TEMA A

I PARTE

1) Studiare la funzione, senza l'uso della derivata seconda:

$$f(x) = \sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x}$$

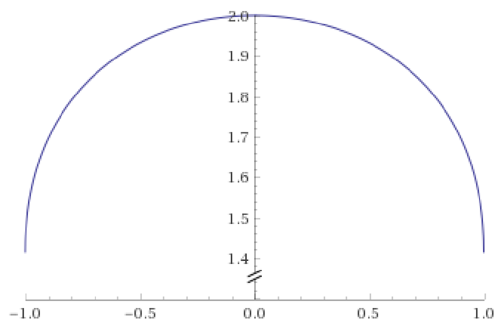
$C.E.\ \ 1 - x \geq 0 \wedge 1 + x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \wedge x \geq -1 \Rightarrow\ x \in [-1,1]$, la funzione è pari, $f(0) = 2, f(\mp 1) = \sqrt{2}$

Nessun limite da calcolare

$f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{1 - x}} + \dfrac{1}{2\sqrt{1 + x}} = \dfrac{-\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}}{2\sqrt{1 - x^2}}, x \in (-1,1), f'(x) \geq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{1 - x} \geq \sqrt{1 + x} \Rightarrow 1 - x \geq 1 + x \Rightarrow 2x \leq 0 \Rightarrow x \leq 0$
ossia la $f(x)$ è crescente in $(-1,0)$ e decrescente in $(0,1)$ con un massimo in $x = 0$.
Studiamo cosa succede alla derivata ad uno dei due estremi (data la simmetria ne basta uno solo)

$$\lim_{x \to 1^-} -\frac{1}{2\underbrace{\sqrt{1 - x}}_{\to 0+}} + \frac{1}{2\underbrace{\sqrt{1 + x}}_{\to \sqrt{2}}} = -\infty$$

Data che la derivata prima ha valore $-\infty$ agli estremi del dominio e dato il punto di massimo il grafico è:



2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x^3}{\ln x^4}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x^3}{\ln x^4} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^3}}{\frac{4x^3}{x^4}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{3}{x}}{\frac{4}{x}} = \frac{3}{4}$$

Riportare solo i passaggi essenziali

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x\ +\ 2}\ -\sqrt{2x}}{\sqrt{x\ -\ 2}}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x\ +\ 2}\ -\sqrt{2x}}{\sqrt{x\ -\ 2}}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2-2x}{\sqrt{x-2}\left(\sqrt{x\ +\ 2}+\sqrt{2x}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{\sqrt{x-2}\left(\sqrt{x\ +\ 2}+\sqrt{2x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}-\frac{x-2}{\sqrt{x-2}\left(\sqrt{x\ +\ 2}+\sqrt{2x}\right)}=-\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}\left(\sqrt{x\ +\ 2}+\sqrt{2x}\right)}=-\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}}{\left(\sqrt{x\ +\ 2}+\sqrt{2x}\right)}=-\frac{2}{4}$$

$$=-\frac{1}{2}$$

4) Determinare $k\in\mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua nel dominio indicato

$$f(x)=\begin{cases}e^{|k|} & \text{se } x\geq 0\\ 3+x & \text{se } x<0\end{cases}$$

$$f(0)=e^{|k|}=\lim_{x\to 0^-}3+x=3\Rightarrow e^{|k|}=3\Rightarrow |k|=\ln 3\Rightarrow k=\mp\ln 3$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Lagrange alla funzione

$$f(x)=e^x-x$$

nell'intervallo $[0,1]$

Considerando l'intervallo $[0,1]$, si noti che $f(x)$ è in esso sicuramente continua

con $f(1)=e-1$ ed $f(0)=1$

$f'(x)=e^x-1$ evidentemente derivabile in $[0,1]$,

applico Lagrange

$$\frac{e-1-1}{1-0}=e-2\Rightarrow e^x-1=e-2\Rightarrow e^x=e-1\Rightarrow x=\ln(e-1)$$

Riportare solo i passaggi essenziali

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$$

Ponendo $\sqrt{x} = u \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = du \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2du$, se $x = 1 \to u = 1$, se $x = 4 \to u = 2$, inoltre $x = u^2$

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx = 2\int_1^2 \frac{1}{1+u^2}\,du = 2[\arctan u]_1^2 = 2\arctan 2 - 2\arctan 1 = 2\arctan 2 - \frac{\pi}{2}$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_{-1}^1 \frac{2x^2-2}{x+1}\,dx$$

$$\int \frac{2x^2-2}{x+1}\,dx = 2\int \frac{x^2-1}{x+1}\,dx = 2\int \frac{(x-1)(x+1)}{x+1}\,dx = 2\int x-1\,dx = x^2-2x+c$$

A causa dell'estremo inferiore di integrazione:

$$\int_{-1}^1 \frac{2x^2-2}{x+1}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{-1+\epsilon}^1 \frac{2x^2-2}{x+1}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}[x^2-2x]_{-1+\epsilon}^1 =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0^+} 1-2-(-1+\epsilon)^2+2(-1+\epsilon) = 1-2-1-2 = -4$$

Ossia converge.

Riportare solo i passaggi essenziali

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-\sqrt{n}}$$

Applicando il criterio del rapporto si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n-\sqrt{n}}{n+1-\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1-\sqrt{n+1}} - \frac{\sqrt{n}}{n+1-\sqrt{n+1}} = 1+0 = 1$$

da cui $R = 1$ e poiché $c = 0$ ne consegue che $l'\mathrm{I.C.}$ è $(-1, 1)$.

Valutiamo il comportamento agli estremi

Se $x = 1 \Rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-\sqrt{n}} > \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$ non converge (maggiorante della serie armonica)

Se $x = -1 \Rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$ che converge $\left(\text{secondo Leibniz} \frac{1}{n-\sqrt{n}} > \frac{1}{n+1-\sqrt{n+1}}\right)$

da cui, l'intervallo di convergenza è $[-1,1)$.

9) Calcolare il polinomio di McLaurin di ordine 2 della seguente funzione:

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right) \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = -\frac{(x^2+1)2x}{(x^2+1)^2} = -\frac{2x}{x^2+1} \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = -\frac{2(x^2+1)-4x^2}{(x^2+1)^2} = -\frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} \Rightarrow f''(0) = -2$$

E il polinomio risultante è: $P_0^2(x) = -x^2$

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y=2 \\ x+z=2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2-R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 scambia R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$ da cui si ottiene:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ -y=-1 \\ -z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \text{Soluzione } (1,1,1)$$

Riportare solo i passaggi essenziali