MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) II SESSIONE INVERNALE 2019/20

MATR.___________ COGNOME________________ NOME_________________

TEMA B

I PARTE

1) Studiare la funzione, senza l'uso della derivata seconda:

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

$\text{C.E.}\ 1-x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq \mp 1 \Rightarrow x \in (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$

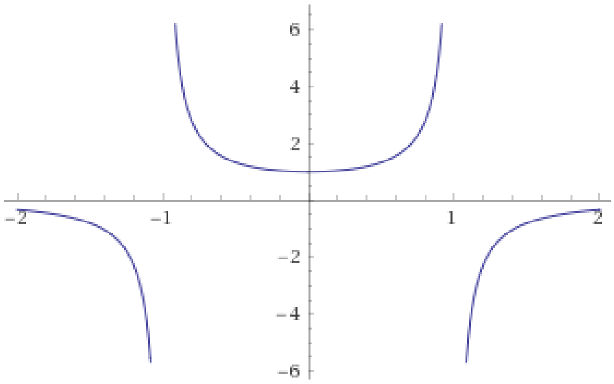
$f(-x) = f(x)$ ⇒ funzione pari e la studio in $(0,1) \cup (1,+\infty)$, $f(0) = 1$

$$\lim_{x\to 1^{\mp}} \frac{1}{1-x^2} = \lim_{x\to 1^{\mp}} \frac{1}{\underbrace{(1-x)}_{0^{\pm}}\underbrace{(1+x)}_{>0}} = \pm\infty \text{ Asintoto verticale sx e dx}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1-x^2} = 0 \text{ Asintoto orizzontale}$$

$$f'(x) = -\frac{-2x}{(1-x^2)^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2} \geq 0$$

$2x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \cap (0,1) \cup (1,+\infty)$ in $x = 0$ si ha un min



2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{3x-3}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\overbrace{\sqrt{x}-1}^{\to 0}}{\underbrace{3x-3}_{\to 0}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{3} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{6\sqrt{x}} = \frac{1}{6}$$

<u>Riportare solo i passaggi essenziali</u>

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4}{x+3}\right)^{x+2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4}{x+3}\right)^{x+2} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{4}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{4}}\right]^{\frac{4x+8}{x+3}} = e^4$$

4) Determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua nel dominio indicato

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & se\ x \geq 0 \\ e^{a+x} & se\ x < 0 \end{cases}$$

$f(0) = 4;\ \lim_{x\to 0^-} e^{a+x} = e^a = 4 \Rightarrow a = \ln 4$

Quindi se $\ln 4$ la funzione risulta continua in tutti i reali.

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Rolle alla funzione

$$f(x) = \frac{x}{x^2+4}$$

nell'intervallo $[1, 4]$

Considerando l'intervallo $[1, 4]$, si noti che $f(x)$ è in esso sicuramente continua

con $f(1) = \frac{1}{5} = f(4)$

$f'(x) = \frac{x^2+4-2x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}$ evidentemente derivabile in $[1, 4]$,

applico Rolle

$\frac{4-x^2}{(x^2+4)^2} = 0 \Rightarrow 4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x =< \begin{matrix} -2 \\ 2 \end{matrix}$ da cui

$x = 2$, l'altra soluzione non è accettabile

Riportare solo i passaggi essenziali

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_{1}^{e^2} \frac{2\ln x}{x^2}\,dx$$

$$\int \frac{2\ln x}{x^2}\,dx = \int 2x^{-2}\ln x\,dx = -\frac{2\ln x}{x} - 2\int -\frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{2\ln x}{x} + 2\int x^{-2}\,dx = -\frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x} + c$$

$$\int_{1}^{e^2} \frac{2\ln x}{x^2}\,dx = \left[-\frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x}\right]_1^{e^2} = -\frac{2\ln e^2}{e^2} - \frac{2}{e^2} + 2 = -\frac{4}{e^2} - \frac{2}{e^2} + 2 = 2 - \frac{6}{e^2}$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\,dx$$

Considerando: $\frac{1}{x} = u \Rightarrow -\frac{1}{x^2}\,dx = du \Rightarrow \frac{dx}{x^2} = -du \Rightarrow$

$$\int \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\,dx = \int -\sin u\,dt = \cos u + c = \cos\frac{1}{x} + c$$

A causa dell'estremo superiore di integrazione:

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\,dx = \lim_{N\to+\infty} \int_{1}^{N} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\,dx = \lim_{N\to+\infty} \left[\cos\frac{1}{x}\right]_1^N =$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \cos\frac{1}{N} - \cos 1 = \cos 0 - \cos 1 = 1 - \cos 1$$

Ossia converge.

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n+2}\frac{x^n}{3^n}$$

Applicando il criterio della radice si ottiene $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{n+2}\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3}\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{n+2}} = \frac{1}{3}$

da cui $R = 3$ e poiché $c = 0$ ne consegue che l'I. C. è $(-3, 3)$.

Valutiamo il comportamento agli estremi

Se $x = 3 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n+2}$ non converge (il termine generale converge ad 1)

Se $x = -3 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n+2}$ che non converge

da cui, l'intervallo di convergenza è $(-3,3)$.

9) Calcolare il polinomio di McLaurin di ordine 2 della seguente funzione:

$$f(x) = e^{\sin x}$$

$f(x) = e^{\sin x} \Rightarrow f(0) = 1$

$f'(x) = \cos x\, e^{\sin x} \Rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x\, e^{\sin x} + \cos^2 x\, e^{\sin x} \Rightarrow f''(0) = 1$

E il polinomio risultante è: $P_0^2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y = 2 \\ 2x + 2y + z = 5 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ da cui si ottiene:

$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - y \\ z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Soluzione $(2 - y, y, 1)$

Riportare solo i passaggi essenziali