MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina)   II SESSIONE INVERNALE 2019/20

MATR.___________ COGNOME_______________ NOME________________

TEMA C

I PARTE

---

1) Studiare la funzione, senza l'uso della derivata seconda:

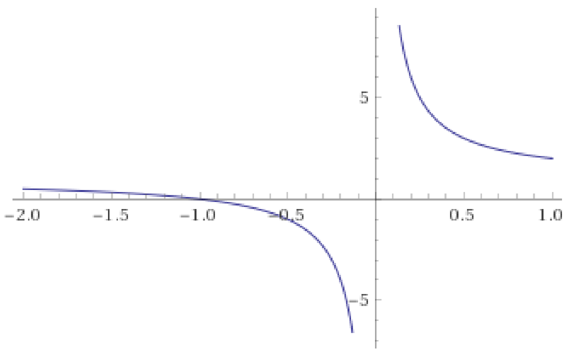
$$f(x) = \left|\frac{1}{x} + 1\right|$$

C. E. $x \neq 0 \Rightarrow f(x)$ non è nè pari, nè dispari. La studio senza il valore assoluto che applicherò alla fine.

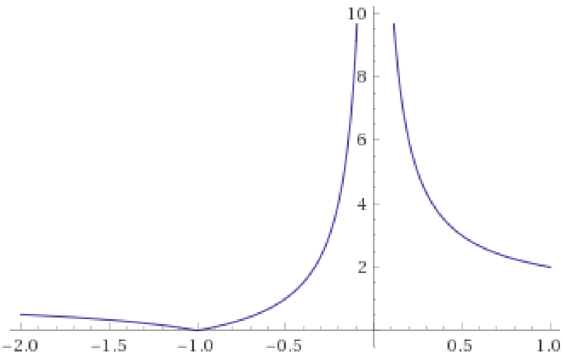
$\lim_{x\to\mp\infty} \frac{1}{x} + 1 = 1$ Asintoto orizzontale dx e sx

$\lim_{x\to 0^{\mp}} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to\mp\infty} + 1 = \mp\infty$ Asintoto verticale sx e dx

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \leq 0$ strettamente decrescente



$\Rightarrow$



2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sin x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{e^{x^2} - 1}^{\to 0}}{\underbrace{\sin x}_{\to 0}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2xe^{x^2}}{\cos x} = 0$$

Riportare solo i passaggi essenziali

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3e^x-5}{1+4e^x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3e^x-5}{1+4e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{5}{e^x}}{\frac{1}{e^x}+4}=\frac{3}{4}$$

4) Determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua nel dominio indicato

$$f(x)=\begin{cases}2 & se\ x\geq 1\\ \sqrt[3]{ax-2} & se\ x<1\end{cases}$$

$f(1)=\sqrt[3]{a-2};\ \lim_{x\to 1^+} 2=2 \Rightarrow \sqrt[3]{a-2}=2 \Rightarrow a-2=8 \Rightarrow a=10$

Quindi se $a=10$ la funzione risulta continua in tutti i reali.

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Lagrange alla funzione

$$f(x)=e^x$$

nell'intervallo [-1,0].

$f(x)$ è continua in $[-1,0]$, inoltre $f(-1)=\frac{1}{e};\ f(0)=1$

$$f'(x)=e^x \quad \text{derivabile in } (-1,0)$$

Tutte le ipotesi del teorema sono verificate. Applichiamo la tesi:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\frac{1}{e}-1}{-1-0}=-\frac{1-e}{e}=\frac{e-1}{e}=e^x \Rightarrow x=\ln\left(\frac{e-1}{e}\right)=\ln(e-1)-1$$

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^1 \arctan x \, dx$$

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} dx =$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c =$$

$$\int_0^1 \arctan x \, dx = \left[x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \arctan 1 - \frac{1}{2}\ln 2 - 0 \arctan 0 - \frac{1}{2}\ln 1 =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+(x^2-1)^2} dx$$

Ponendo: $x^2 - 1 = z \Rightarrow 2xdx = dz \Rightarrow xdx = \frac{dz}{2}$

$$\int \frac{x}{1+(x^2-1)^2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+z^2} dz = \frac{1}{2}\arctan z + c = \frac{1}{2}\arctan(x^2-1) + c$$

A causa dell'estremo superiore di integrazione:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+(x^2-1)^2} dx = \lim_{N\to+\infty} \int_0^N \frac{x}{1+(x^2-1)^2} dx = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2}[\arctan(x^2-1)]_0^N =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{N\to+\infty} \arctan(N^2-1) - \arctan(-1) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\frac{3}{4}\pi = \frac{3}{8}\pi$$

Ossia converge.

Riportare solo i passaggi essenziali

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze, senza considerare gli estremi:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$$

Applicando il criterio del rapporto si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)n!\,n^n}{(n+1)(n+1)^n n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

da cui $R = e$ e poiché $c = 0$ ne consegue che l'I. C. è $(-e, e)$.

Non valutiamo il comportamento agli estremi

9) Calcolare il polinomio di McLaurin di ordine 2 della seguente funzione:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + x$$

$f(x) = x^3 - 3x^2 + x \Rightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 1 \Rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = 6x - 6 \Rightarrow f''(0) = -6$

E il polinomio risultante è: $P_0^2(x) = x - \dfrac{6x^2}{2} = x - 3x^2$

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y = 2 \\ 2x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ sistema incompatibile}$$