MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina)   II SESSIONE INVERNALE 2019/20

MATR.__________ COGNOME______________ NOME_______________

TEMA D

I PARTE

1) Studiare la funzione, senza l'uso della derivata seconda:

$$f(x) = e^x - e^{-x}$$

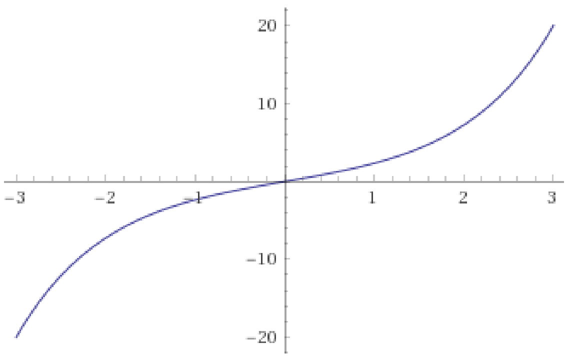
$\mathrm{C.E.}\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ è dispari. La studio in $x \in [0, +\infty)$, inoltre $f(0) = 0$

$\lim_{x\to+\infty} e^x - e^{-x} = +\infty$ Asintoto orizzontale dx

$f'(x) = e^x + e^{-x} \geq 0$ strettamente crescente

$f'(0) = 2$

Tenendo conto della simmetria della funzione e del fatto che per x positivo crescente si comporta come una esponenziale semplice il grafico è il seguente



2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} \ln x^2$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} \ln x^2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x^2}{x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x}{x^2}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{2x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

<u>**Riportare solo i passaggi essenziali**</u>

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{6x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{6x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{6x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-6}=e^{-6}$$

4) Determinare $a\in\mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua nel dominio indicato

$$f(x)=\begin{cases}\ln(ax) & \text{se } x\geq 1\\ \ln(3ax^2-4) & \text{se } x<1\end{cases}$$

$f(1)=\ln(a)$; $\lim\limits_{x\to1^-}\ln(3ax^2-4)=\ln(3a-4)\Rightarrow\ln(a)=\ln(3a-4)\Rightarrow a=3a-4\Rightarrow 2a=4\Rightarrow a=2$

Quindi se $a=2$ la funzione risulta continua in tutti i reali.

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Rolle alla funzione

$$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

nell'intervallo $[-1,1]$

Considerando l'intervallo $[-1,1]$, si noti che $f(x)$ è in esso sicuramente continua

con $f(-1)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}+e\right)=\frac{1}{2}\frac{1+e^2}{e}=f(1)$

$f'(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ evidentemente derivabile in $[-1,1]$,

applico Rolle

$e^x-e^{-x}=0\Rightarrow e^x-\frac{1}{e^x}=0\Rightarrow\frac{e^{x^2}-1}{e^x}=0\Rightarrow e^{x^2}-1=0\Rightarrow(e^x+1)(e^x-1)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow e^x-1=0\Rightarrow e^x=1\Rightarrow x=0$

Riportare solo i passaggi essenziali

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_1^e \frac{1}{x(\ln x + 2)} dx$$

Ponendo $\ln x + 2 = t \Rightarrow \frac{1}{x} dx = dt$

$$\int \frac{1}{x(\ln x + 2)} dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + c = \ln|\ln x + 2| + c$$

$$\int_1^e \frac{1}{x(\ln x + 2)} dx = [\ln|\ln x + 2|]_1^e = \ln|1 + 2| - \ln|2| = \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + x \, dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + x \, dx = \int x^{-\frac{1}{3}} + x \, dx = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + \frac{x^2}{2} + c = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{x^2}{2} + c$$

A causa dell'estremo inferiore di integrazione:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + x \, dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + x \, dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{x^2}{2}\right]_\epsilon^1 =$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{\epsilon^2} - \frac{\epsilon^2}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Ossia converge.

Riportare solo i passaggi essenziali

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^n (x-1)^n}{3^n}$$

Applicando il criterio della radice si ottiene $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{5^n}{3^n}} = \frac{5}{3}$

da cui $R = \frac{3}{5}$ e poiché $c = 1$ ne consegue che l'I. C. è $\left(\frac{2}{5}, \frac{8}{5}\right)$.

Valutiamo il comportamento agli estremi

Se $x = \frac{8}{5} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^n}{3^n}\left(\frac{8}{5}-1\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n \left(\frac{3}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 1$ non converge

Se $x = \frac{2}{5} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^n}{3^n}\left(\frac{2}{5}-1\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{5}{3}\right)^n \left(\frac{3}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ non converge

da cui, l'intervallo di convergenza è $\left(\frac{2}{5}, \frac{8}{5}\right)$.

9) Calcolare il polinomio di McLaurin di ordine 2 della seguente funzione:

$$f(x) = \tan(x^2)$$

$f(x) = \tan(x^2) \Rightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{2x}{\cos^2 x^2} \Rightarrow f'(0) = 0$

$f''(x) = \frac{2\cos^2(x^2) - 8x^2 \sin x^2 \cos x^2}{\cos^4 x^2} \Rightarrow f''(0) = 2$

E il polinomio risultante è: $P_0^2(x) = x^2$

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2-R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3+R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ da cui si ottiene l'unicasoluzione $x = y = x = 0$