MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) III SESSIONE INVERNALE 2019/20

MATR.___________ COGNOME________________ NOME_________________

TEMA A

I PARTE

1) Studiare la funzione, senza l'uso della derivata seconda:

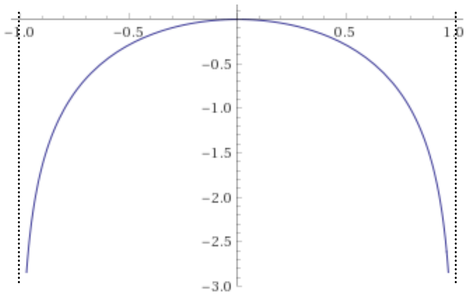
$$f(x) = \log(1 - x^2)$$

$C.E.\;\; 1 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1 \Rightarrow\; x \in (-1,1)$, la funzione è pari, la studio in $[0,1)$, $f(0) = 0$

$\lim_{x \to -1^+} \log(1 - x^2) = -\infty$ Asintoto verticale sx

$f'(x) = -\dfrac{2x}{1 - x^2} \leq 0$ per $x \geq 0 \wedge x < 1$

ossia la $f(x)$ è decrescente in $(0,1)$ con un massimo in $x = 0$ data la simmetria.



2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 3\sin x}{x - 2\sin x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 3\sin x}{x - 2\sin x} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2x + 3\cos x}{1 - 2\cos x} = \frac{3}{-1} = -3$$

Riportare solo i passaggi essenziali

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} + \cos x$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} + \cos x \ = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(1 - \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right) \ = +\infty \ \left(\text{dato che } \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} = 0\right)$$

4) Determinare $k \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua nel dominio indicato

$$f(x) = \begin{cases} x - k & \text{se } x \geq 0 \\ k + \sin x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$f(0) = -k = \lim_{x\to0^-} k + \sin x \ = k \Rightarrow -k = k \Rightarrow 2k = 0 \Rightarrow k = 0$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Lagrange alla funzione

$$f(x) = \frac{x+3}{2x-5}$$

nell'intervallo $[0, 2]$

Considerando l'intervallo $[0, 2]$, si noti che $f(x)$ è in esso sicuramente continua

con $f(0) = -\dfrac{3}{5}$ ed $f(2) = -5$

$$f'(x) = \frac{2x - 5 - 2(x+3)}{(2x-5)^2} = -\frac{11}{(2x-5)^2} \quad \text{evidentemente derivabile in } (0,2),$$

applico Lagrange

$$\frac{-5 + \frac{3}{5}}{2} = \frac{-25+3}{10} = -\frac{22}{10} = -\frac{11}{5} = -\frac{11}{(2x-5)^2} \Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{1}{(2x-5)^2} \Rightarrow (2x-5)^2 = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - 5 = \mp\sqrt{5} \Rightarrow 2x = 5 \mp \sqrt{5} \Rightarrow x = \frac{5 \mp \sqrt{5}}{2} \text{ di cui solo } x = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \text{ è accettabile}$$

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_1^2 \frac{x}{1+x^4}\,dx$$

Ponendo $x^2 = u \Rightarrow 2xdx = du \Rightarrow xdx = \dfrac{du}{2}$, se $x = 1 \rightarrow u = 1$, se $x = 2 \rightarrow u = 4$, inoltre $x^4 = u^2$

$$\int_1^2 \frac{x}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{1}{1+u^2}\,du = \frac{1}{2}[\arctan u]_1^4 = \frac{1}{2}(\arctan 4 - \arctan 1) = \frac{1}{2}\arctan 4 - \frac{\pi}{8}$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_0^{+\infty} \frac{18}{(2+3x)^7}\,dx$$

Poniamo $2 + 3x = t \Rightarrow 3dx = dt \Rightarrow dx = dt$ da cui

$$\int \frac{18}{(2+3x)^7}\,dx = \int \frac{6}{t^7}\,dx = 6\int t^{-7}dx = 6\frac{t^{-6}}{-6} + c = -\frac{1}{(2+3x)^6} + c$$

A causa dell'estremo inferiore di integrazione:

$$\int_0^{+\infty} \frac{18}{(2+3x)^7}\,dx = \lim_{N\to+\infty}\int_0^N \frac{18}{(2+3x)^7}\,dx = -\lim_{N\to+\infty}\left[\frac{1}{(2+3x)^6}\right]_0^N =$$

$$= -\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{(2+3N)^6} - \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$$

Ossia converge.

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+1)2^{n+1}x^n$$

Applicando il criterio del rapporto si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{((n+1)^2+1)2^{n+2}}{(n^2+1)2^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+2n+2}{n^2+1}\frac{2\ 2^{n+1}}{2^{n+1}} = 1\cdot 2 = 2$$

da cui $R=\frac{1}{2}$ e poiché $c=0$ ne consegue che l'I. C. è $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Valutiamo il comportamento agli estremi

Se $x=\frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+1)2^{n+1}\frac{1}{2^n} = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+1)$ non converge (termine generale divergente)

Se $x=-\frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(n^2+1)2^{n+1}\frac{1}{2^n} = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(n^2+1)$ che non converge

da cui, l'intervallo di convergenza è $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

9) Calcolare il polinomio di McLaurin di ordine 2 della seguente funzione:

$$f(x)=\ln(3x+1)$$

$f(x)=\ln(3x+1) \Rightarrow f(0)=0$

$f'(x)=\frac{3}{3x+1} \Rightarrow f'(0)=3$

$f''(x)=-\frac{9}{(3x+1)^2} \Rightarrow f''(0)=-9$

E il polinomio risultante è: $P_0^2(x)=3x-\frac{9}{2}x^2$

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x+y+z=-3 \\ x+y=-2 \\ x+z=-2 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 scambia R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ da cui si ottiene:

$\begin{cases} x+y+z=-3 \\ -y=1 \\ -z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow$ Soluzione $(-1,-1,-1)$