MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) III SESSIONE INVERNALE 2019/20

MATR.____________ COGNOME_________________ NOME__________________

TEMA B

I PARTE

---

1) Studiare la funzione, senza l'uso della derivata seconda:

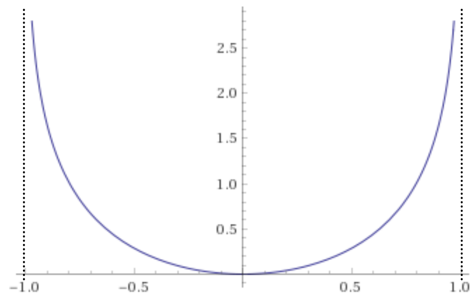
$$f(x) = \ln \frac{1}{1-x^2}$$

$\text{C.E.}\ 1 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow x \in (-1,1)$

$f(-x) = f(x) \Rightarrow$ funzione pari, la studio in $[0,1)$, $f(0) = 1$, inoltre $f(x) = \ln \frac{1}{1-x^2} = -\ln(1-x^2)$

$\lim_{x \to 1^-} -\log(1-x^2) = +\infty$ Asintoto verticale sx

$f'(x) = -\frac{-2x}{(1-x^2)^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2} \geq 0$ per $x \geq 0 \wedge x < 1$ e data la simmetria in $x = 0$ si ha un min



2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{x^2}}{x^2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{x^2}}{x^2} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-2xe^{x^2}}{2x} = -\lim_{x \to 0} e^{x^2} = -1$$

<u>Riportare solo i passaggi essenziali</u>

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0$ (funzione infinitesima diviso funzione divergente)

4) Determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua nel dominio indicato

$$f(x) = \begin{cases} \tan x + a & \text{se } x \geq 0 \\ e^{ax} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$f(0) = a;\ \lim_{x\to0^-} e^{ax} = 1 \Rightarrow a = 1$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Rolle alla funzione

$$f(x) = e^{-x^2}$$

nell'intervallo $[-3, 3]$

Considerando l'intervallo $[-3, 3]$, si noti che $f(x)$ è in esso sicuramente continua

con $f(3) = e^{-9} = f(-3)$

$f'(x) = -2xe^{-x^2}$ evidentemente derivabile in $(-3,3)$,

applico Rolle

$-2xe^{-x^2} = 0 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0$

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x - 1} dx$$

Poniamo $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt \Rightarrow$ per $x = \ln 3 \Rightarrow t = 3;$ per $x = \ln 2 \Rightarrow t = 2$

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x - 1} dx = \int_2^3 \frac{1}{t-1} dt = \int_2^3 \frac{1}{t-1} d(t-1) = [\ln(t-1)]_2^3 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_0^1 \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$\int \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) dx = \int \left(x^{-\frac{1}{2}} - 1\right) dx = 2\sqrt{x} - x + c$$

A causa dell'estremo superiore di integrazione:

$$\int_0^1 \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[2\sqrt{x} - x\right]_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon \to 0^+} 2 - 1 - 2\sqrt{\epsilon} + \epsilon = 1$$

Ossia converge.

<u>Riportare solo i passaggi essenziali</u>

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \sin\frac{1}{n} x^n$$

Applicando il criterio del rapporto si ottiene $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\sin\frac{1}{n+1}}{n\sin\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{\sin\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}}}{\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}} = 1$

da cui $R = 1$ e poiché $c = 0$ ne consegue che l'I. C. è $(-1, 1)$.

Valutiamo il comportamento agli estremi

Se $x = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} n \sin\frac{1}{n}$ diverge (il termine generale converge ad 1)

Se $x = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n \sin\frac{1}{n}$ che non converge

da cui, l'intervallo di convergenza è $(-1,1)$.

9) Calcolare il polinomio di McLaurin di ordine 2 della seguente funzione:

$$f(x) = \cos 2x$$

$f(x) = \cos 2x \Rightarrow f(0) = 1$

$f'(x) = -2\sin 2x \Rightarrow f'(0) = 0$

$f''(x) = -4\cos 2x \Rightarrow f''(0) = -4$

E il polinomio risultante è: $P_0^2(x) = 1 - 2x^2$

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y = 2 \\ 2x + 2y + z = 4 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2-R_1 \\ R_3-2R_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ da cui il sistema è incompatibile

Riportare solo i passaggi essenziali