MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina)   III SESSIONE INVERNALE 2019/20

MATR.__________ COGNOME______________ NOME_______________

TEMA C

I PARTE

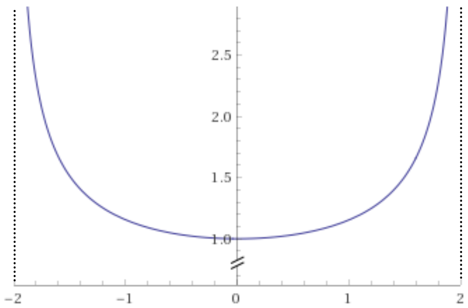
1) Studiare la funzione, senza l'uso della derivata seconda:

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}$$

C. E. $4 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow -2 < x < 2, f(x)$ è pari, la studio in $[0,1), f(0) = 1$

$\lim_{x \to 2^-} \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}} = +\infty$ Asintoto verticale sx

$f'(x) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)(4 - x^2)^{-\frac{1}{2}-1}(-2x) = \frac{2x}{\sqrt{(4 - x^2)^3}} \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \wedge x < 2,$ data la simmetria della funzione in $x = 0$ si ha un min



2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{x^2 + 2x}$$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{x^2 + 2x} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{3}{1 + 3x}}{2x + 2} = \frac{3}{2}$

Riportare solo i passaggi essenziali

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x - 5^x}{3^x + 5^x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x - 5^x}{3^x + 5^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x - 1}{\left(\frac{3}{5}\right)^x + 1} = -1$$

4) Determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua nel dominio indicato

$$f(x) = \begin{cases} (a^2 - 2a + 4)x & \text{se } x \geq 1 \\ 2ax & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$$f(1) = a^2 - 2a + 4;\ \lim_{x\to1^-} 2ax = 2a \Rightarrow a^2 - 2a + 4 = 2a \Rightarrow a^2 - 4a + 4 = 0 \Rightarrow (a-2)^2 = 0 \Rightarrow a = 2$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Lagrange alla funzione

$$f(x) = x^2 - 6x + 9$$

nell'intervallo [3,6].

$f(x)$ è continua in $[3,6]$, inoltre $f(6) = 9;\ f(3) = 0$

$f'(x) = 2x - 6$ derivabile in $(3,6)$

Tutte le ipotesi del teorema sono verificate. Applichiamo la tesi:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{9}{6-3} = \frac{9}{3} = 3 = 2x - 6 \Rightarrow 2x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{2}$$

Riportare solo i passaggi essenziali

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_1^2 \frac{3x^2-2x+1}{x^3-x^2+x+1}\,dx$$

$$\int_1^2 \frac{3x^2-2x+1}{x^3-x^2+x+1}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x^3-x^2+x+1}\,d(x^3-x^2+x+1) = [\ln|x^3-x^2+x+1|]_1^2 =$$

$$= \ln|8-4+2+1| - \ln|1-1+1+1| = \ln 7 - \ln 2 = \ln\frac{7}{2}$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx$$

Ponendo: $\ln x = z \Rightarrow \frac{1}{x}dx = dz$

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int z dz = z^2 + c = \ln^2 x + c$$

A causa dell'estremo superiore di integrazione:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{N\to+\infty}\int_1^N \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{N\to+\infty}[\ln^2 x]_0^N = \lim_{N\to+\infty} \ln^2 N - \ln^2 1 = +\infty$$

Ossia diverge.

Riportare solo i passaggi essenziali

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}}\, x^n$$

Applicando il criterio del rapporto: $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^2}}}{\sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n^2+2n+2}{n^2+2n+1} \cdot \frac{n^2}{n^2+1}} = 1$

da cui $R = 1$ e poiché $c = 0$ ne consegue che $\mathrm{l'I.C.}$ è $(-1, 1)$.

Valutiamo il comportamento agli estremi

Se $x = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}}$ diverge (il termine generale converge ad 1)

Se $x = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}}$ che non converge

da cui, l'intervallo di convergenza è $(-1,1)$.

9) Calcolare il polinomio di McLaurin di ordine 2 della seguente funzione:

$$f(x) = 2^x$$

$f(x) = 2^x \Rightarrow f(0) = 1$

$f'(x) = 2^x \ln 2 \Rightarrow f'(0) = \ln 2$

$f''(x) = 2^x \ln^2 2 \Rightarrow f''(0) = \ln^2 2$

E il polinomio risultante è: $P_0^2(x) = 1 + \ln 2 \cdot x + \frac{\ln^2 2}{2} \cdot x^2$

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y = 2 \\ 2x + 2y + 3z = 6 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3+R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ sistema incompatibile

Riportare solo i passaggi essenziali