MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) III SESSIONE INVERNALE 2019/20

MATR.__________ COGNOME______________ NOME_______________

TEMA D

I PARTE

1) Studiare la funzione, senza l'uso della derivata seconda:

$$f(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$

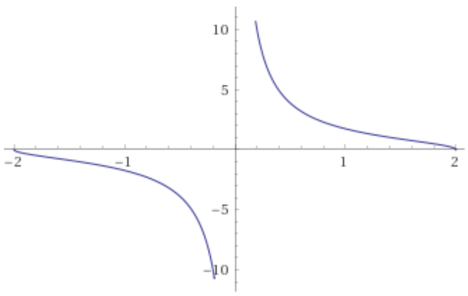
$\text{C. E. } 4-x^2>0 \cap x\neq 0 \Rightarrow x^2<4 \cap x\neq 0 \Rightarrow, f(x)$ è dispari, la studio in $(0,2], f(2)=0$

$\lim_{x\to 0^{\mp}} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} = \mp\infty$ Asintoto vertcale dx e sx

$$f'(x)=\frac{\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}x-\sqrt{4-x^2}}{x^2}=\frac{-x^2-4+x^2}{x^2\sqrt{4-x^2}}=-\frac{4}{x^2\sqrt{4-x^2}}<0 \text{ per } x>0$$

data la simmetria cerchiamo di capire come tende a zero in *x=2*

$\lim_{x\to 2^-} -\frac{4}{x^2\sqrt{4-x^2}}=-\infty$ quindi tra $x=1$ e $x=2$ si ha la presenza di un flesso



2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{\ln x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=1$$

Riportare solo i passaggi essenziali

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x \to -\infty} x \sin \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to -\infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$$

4) Determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua nel dominio indicato

$$f(x) = \begin{cases} (1-a)x^2 & \text{se } x \geq 1 \\ \dfrac{x}{1+a} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$$f(1) = 1 - a; \ \lim_{x \to 1^-} \frac{x}{1+a} = \frac{1}{1+a} \Rightarrow 1 - a = \frac{1}{1+a} \Rightarrow 1 - a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Rolle alla funzione

$$f(x) = -x^2 + 6x$$

nell'intervallo $[2, 4]$

Considerando l'intervallo $[2, 4]$, si noti che $f(x)$ è in esso sicuramente continua

con $f(2) = 8 = f(4)$

$f'(x) = -2x + 6$ evidentemente derivabile in (2,4),

applico Rolle

$-2x + 6 = 0 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$

Riportare solo i passaggi essenziali

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_1^2 \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[2]{x}}\,dx$$

$$\int_1^2 \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[2]{x}}\,dx = \int_1^2 x^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{1}{2}}dx = \int_1^2 x^{\frac{1}{6}}dx = \left[\frac{x^{\frac{1}{6}+1}}{\frac{1}{6}+1}\right]_1^2 = \left[\frac{x^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}}\right]_1^2 = \frac{6}{7}\left[x^{\frac{7}{6}}\right]_1^2 = \frac{6}{7}\left[x\sqrt[6]{x}\right]_1^2 = \frac{6}{7}\left(2\sqrt[6]{2}-1\right)$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_0^1 \frac{x^2-1}{x-1}\,dx$$

$$\int \frac{x^2-1}{x-1}\,dx = \int (x+1)\,dx = \frac{x^2}{2}+x+c$$

A causa dell'estremo superiore di integrazione:

$$\int_0^1 \frac{x^2-1}{x-1}\,dx = \lim_{\epsilon\to0^+}\int_0^{1-\epsilon} \frac{x^2-1}{x-1}\,dx = \lim_{\epsilon\to0^+}\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^{1-\epsilon} =$$

$$= \lim_{\epsilon\to0^+}\frac{(1-\epsilon)^2}{2}+(1-\epsilon)-0 = \frac{1}{2}+1 = \frac{3}{2}$$

Ossia converge.

Riportare solo i passaggi essenziali

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-3)^n}{(2n+2)!}$$

Applicando il criterio del rapporto si ottiene $\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+2)!}{(2n+4)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+4)} = 0$

da cui $R = \infty$ $(c = 1)$ne consegue che l'I. C. è l'asse reale.

9) Calcolare il polinomio di McLaurin di ordine 2 della seguente funzione:

$$f(x) = (x-1)^2$$

$f(x) = (x-1)^2 \Rightarrow f(0) = 1$

$f'(x) = 2(x-1) \Rightarrow f'(0) = -2$

$f''(x) = 2 \Rightarrow f''(0) = 2$

E il polinomio risultante è: $P_0^2(x) = 1 - 2x + x^2$

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2-R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ da cui si ottiene $\begin{cases} x + y = 0 \\ -y + z = 0 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$ con soluzione $(-z, z, z), z \in \mathbb{R}$

Riportare solo i passaggi essenziali