MATEMATICA (V. Lacagnina) I SESSIONE INVERNALE 2019/20

MATR.__________ COGNOME______________ NOME_______________

TEMA A

I PARTE

---

1) Studiare il campo di esistenza della funzione e valutarne i limiti individuando eventuali asintoti:

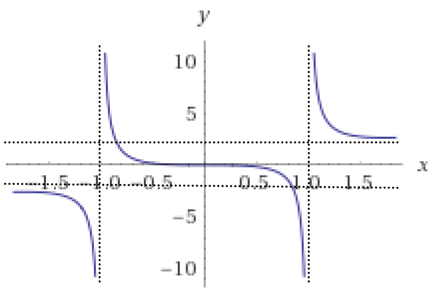
$$f(x) = x \ln x + x$$

$x > 0$

$\lim_{x\to 0^+} x\ln x + x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} + \lim_{x\to 0^+} x \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} + \lim_{x\to 0^+} x = \lim_{x\to 0^+} -x + \lim_{x\to 0^+} x = 0$ No asintoto verticale

$\lim_{x\to +\infty} x\ln x + x = +\infty$ No asintoto orizzontale, no asintoto obliquo

2) Desumere le proprietà della funzione dal seguente grafico (mettere una X sulle risposte corrette):



Dominio:	☐ $\mathbb{R}$	☒ $\mathbb{R}/\{\mp 1\}$	☐ $\mathbb{R}/\{0\}$	☐ (-∞,+∞)
Codominio:	☒ $\mathbb{R}$	☐ $\mathbb{R}/\{0\}$	☐ [0,+∞)	☐ $\mathbb{R}/\{\mp 1\}$
Simmetrie:	☐ pari	☒ dispari		☐ nessuna
Continua:	☒ in $\mathbb{R}/\{\mp 1\}$	☐ in $\mathbb{R}/\{0\}$	☐ in $\mathbb{R}/\{0, \mp 1\}$	
Proprietà:	☐ limitata	☒ illimitata	☐ limitata sup.	☐ limitata inf.
Dotata di:	☐ nulla	☐ max	☐ min	☒ asintoto/i orizzontale/i
	☐ asintoto/i obliquo/i	☒ asintoto/i verticale/i		

3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x^2 - 1}{\sin x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x^2 - 1}{\sin x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-2x \sin x^2}{2x\cos x^2} = \lim_{x\to 0} -\frac{\sin x^2}{\cos x^2} = 0$$

Riportare solo i passaggi essenziali

4) Determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua nel dominio indicato

$$f(x) = \begin{cases} 3ax & \text{se } x > 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \\ ax^2 + \dfrac{4}{3} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$f(1) = 2;\ \lim\limits_{x \to 1^+} 3ax = 3a = 2 \Rightarrow a = \dfrac{2}{3};\ \lim\limits_{x \to 1^-} ax^2 + \dfrac{4}{3} = a + \dfrac{4}{3} = 2 \Rightarrow a = \dfrac{6-4}{3} = \dfrac{2}{3}$

Quindi se $a = \frac{2}{3}$ la funzione risulta continua in tutti i reali

5) Liberare il valore assoluto della seguente equazione:

$$f(x) = (x + |x|) \ln x^2$$

$x \neq 0$; Poiché $|x|$ è facilmente liberabile, si ha

$$f(x) = \begin{cases} (x + x) \ln x^2 & \text{se } x > 0 \\ (x - x) \ln x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x \ln x^2 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

6) Risolvere la seguente equazione:

$$3^{2x} + 3^x - 2 = 0$$

$3^{2x} + 3^x - 2 = 0 \Rightarrow t = 3^x \Rightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 8 = 3^2 \Rightarrow t = \dfrac{-1 \mp 3}{2} =< \begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix}$ da cui

$3^x = -2$ impossibile

$3^x = 1 \Rightarrow x = 0$ soluzione accettabile

Riportare solo i passaggi essenziali

7) Trovare e classificare i punti critici della seguente funzione in $x \in (0, +\infty)$:

$$f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$$

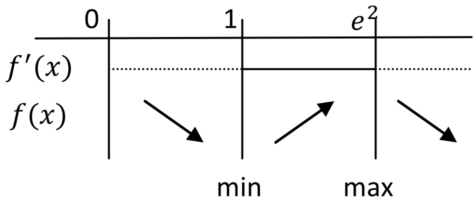
$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{x}\ln x - \ln^2 x}{x^2} = \frac{2\ln x - \ln^2 x}{x^2} \geq 0 \text{ se } 2\ln x - \ln^2 x \geq 0 \Rightarrow \ln^2 x - 2\ln x \leq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \ln x\,(\ln x - 2) \leq 0$

$\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

$\ln x - 2 = 0 \Rightarrow \ln x = 2 \Rightarrow x = e^2$

otteniamo che



ossia $x = 1$ è punto di minimo relativo, mentre $x = e^2$ è punto di massimo relativo

8) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Rolle alla funzione

$$f(x) = \sqrt{3x - x^2}$$

nell'intervallo [0, 3]

Controlliamo che sia continua nell'intervallo: $3x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 3x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 3$

La derivata $f'(x) = \dfrac{3 - 2x}{2\sqrt{3x - x^2}}$ è definita in $(0, 3)$

$f(0) = 0 = f(3)$ da cui le ipotesi del teorema di Rolle sono verificate:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

9) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 0 \\ x + z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - \frac{1}{2}R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \text{ da cui si ottiene:}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -2y - 2z = -1 \\ z = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + \frac{3}{2} = 1 \\ -2y - 3 = -1 \\ z = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = -\frac{1}{2} \\ y = -1 \\ z = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -1 \\ z = \frac{3}{2} \end{cases}$$

10) Trovare, se esiste, la matrice inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_1-2R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & \vdots & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1-3R_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e quindi}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

11) Risolvere la seguente equazione matriciale:

$$3X - 2(A + X) - (B + A) + (C - B) = \underline{0} \qquad con\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3X - 2A - 2X - B - A + C - B = \underline{0} \Rightarrow X = 3A + 2B - C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X = 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+0-1 & 6+2+1 \\ 9+4+1 & 12-2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 14 & 9 \end{pmatrix}$$

12) Individuare il valore del parametro *h* affinché la matrice abbia determinante non nullo:

$$\begin{pmatrix} 1 & h & 1 \\ h & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & h & 1 \\ h & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + h + h - 0 - 1 - h^2 = -h^2 + 2h - 1 = 0 \Rightarrow h^2 - 2h + 1 = 0 \Rightarrow (h-1)^2 = 0 \Rightarrow h = 1$$

Se $h \neq 0$ ma matrice è non singolare

<u>Riportare solo i passaggi essenziali</u>