MATEMATICA (V. Lacagnina) II SESSIONE INVERNALE 2019/20

MATR.__________ COGNOME______________ NOME_______________

TEMA A

I PARTE

1) Studiare il campo di esistenza della funzione e valutarne i limiti individuando eventuali asintoti:

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

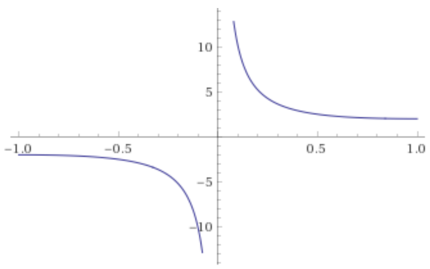
$x \neq 0$

$\lim_{x\to 0^{\mp}} x + \frac{1}{x} = \mp\infty$ Asintoto verticale

$\lim_{x\to \mp\infty} x + \frac{1}{x} = \mp\infty$ No asintoto orizzontale

$\lim_{x\to \mp\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1 = m;\quad q = \lim_{x\to \mp\infty} x + \frac{1}{x} - x = \lim_{x\to \mp\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow y = x$ Asintoto obliquo dx e sx

2) Desumere le proprietà della funzione dal seguente grafico (mettere una X sulle risposte corrette):



Dominio:	☐ $\mathbb{R}$	☐ $\mathbb{R}/\{\mp 1\}$	☒ $\mathbb{R}/\{0\}$	☐ (-∞,+∞)
Codominio:	☐ $\mathbb{R}$	☒ $\mathbb{R}/\{0\}$	☐ [0,+∞)	☐ $\mathbb{R}/\{\mp 1\}$
Simmetrie:	☐ pari	☒ dispari		☐ nessuna
Continua:	☐ in $\mathbb{R}/\{\mp 1\}$	☒ in $\mathbb{R}/\{0\}$	☐ in $\mathbb{R}/\{0, \mp 1\}$	
Proprietà:	☐ limitata	☒ illimitata	☐ limitata sup.	☐ limitata inf.
Dotata di:	☐ nulla	☐ max	☐ min	☒ asintoto/i orizzontale/i
	☐ asintoto/i obliquo/i	☒ asintoto/i verticale/i		

3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x^3}{\ln x^4}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x^3}{\ln x^4} \overset{H}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^3}}{\frac{4x^3}{x^4}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{3}{x}}{\frac{4}{x}} = \frac{3}{4} \quad \text{oppure} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x^3}{\ln x^4} = \lim_{x\to +\infty} \frac{3\ln x}{4\ln x} = \frac{3}{4}$$

Riportare solo i passaggi essenziali

4) Determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua nel dominio indicato

$$f(x) = \begin{cases} a^2x^2 & \text{per } x \geq 1 \\ ax & \text{per } x < 1 \end{cases}$$

$f(1) = a^2; \ \lim\limits_{x \to 1^-} ax = a = a^2 \Rightarrow a^2 - a = 0 \Rightarrow a(a-1) = 0$

Quindi se $a = 0$ oppure $a = 1$ la funzione risulta continua in tutti i reali

5) Liberare il valore assoluto della seguente equazione:

$$f(x) = \frac{|x|}{x-2}$$

$x \neq 0$; Poiché $|x|$ è facilmente liberabile, si ha

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-2} & \text{se } x > 0 \\ -\dfrac{x}{x-2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

6) Risolvere la seguente equazione:

$$8^{2x} - 8^x = 0$$

$8^{2x} - 8^x = 0 \Rightarrow 8^x(8^x - 1) = 0 \Rightarrow 8^x = 0 \ impossibile; \ 8^x = 1 \Rightarrow x = 0$

Riportare solo i passaggi essenziali

7) Trovare e classificare i punti critici della seguente funzione in $x \in (0, +\infty)$:

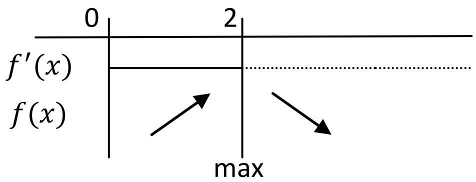
$$f(x) = \frac{x-1}{x^2}$$

$f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x(x-1)}{x^4} = \dfrac{2x - x^2}{x^4} \geq 0$ se $2x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(2-x) \geq 0 \Rightarrow$

$x \geq 0$

$2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$

otteniamo che



ossia $x = 2$ è punto di massimo relativo

8) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Rolle alla funzione

$$f(x) = \frac{x}{x^2+4}$$

nell'intervallo [1, 4]

Considerando l'intervallo $[1, 4]$, si noti che $f(x)$ è in esso sicuramente continua

con $f(1) = \dfrac{1}{5} = f(4)$

$f'(x) = \dfrac{x^2 + 4 - 2x^2}{(x^2+4)^2} = \dfrac{4 - x^2}{(x^2+4)^2}$ evidentemente derivabile in $[1, 4]$,

applico Rolle

$\dfrac{4 - x^2}{(x^2+4)^2} = 0 \Rightarrow 4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x =< \begin{matrix}-2 \\ 2\end{matrix}$ da cui

$x = 2$, l'altra soluzione non è accettabile

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y = 2 \\ 2x + 2y + z = 5 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - 2R_1]{R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ da cui si ottiene:

$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - y \\ z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Soluzione $(2 - y, y, 1)$

10) Trovare, se esiste, la matrice inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1-2R_2]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & \vdots & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1-3R_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 6 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e quindi}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11) Risolvere la seguente equazione matriciale:

$$3(X + C) - 2(X + B + A) - (C - B) = \underline{0} \qquad con\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$3X - 3C - 2X - 2B - 2A - C + B = \underline{0} \Rightarrow X = 2A + B - 4C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2-4 & 2+2-8 \\ 4+3+12 & 4+3-16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 19 & -9 \end{pmatrix}$$

12) Individuare il valore del parametro *h* affinché la matrice abbia determinante non nullo:

$$\begin{pmatrix} 1 & h & 1 \\ h & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & h & 1 \\ h & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + h + h - 1 - 1 - 0 = 2h - 2 = 0 \Rightarrow h - 1 = 0 \Rightarrow h = 1$$

Se $h \neq 1$ la matrice è non singolare

Riportare solo i passaggi essenziali