MATEMATICA (V. Lacagnina) III SESSIONE INVERNALE 2019/20

MATR.___________ COGNOME________________ NOME_________________

TEMA A

I PARTE

---

1) Studiare il campo di esistenza della funzione e valutarne i limiti individuando eventuali asintoti:

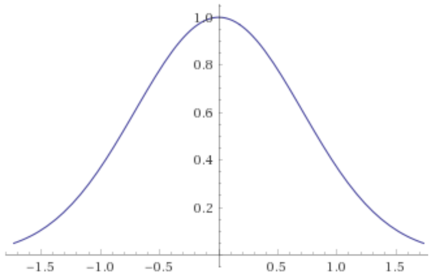
$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

$x \neq -1$

$\lim_{x\to 1^{\mp}} \frac{x}{x+1} = \pm\infty$ Asintoto verticale

$\lim_{x\to \mp\infty} \frac{x}{x+1} = 0$ Asintoto orizzontale

2) Desumere le proprietà della funzione dal seguente grafico (mettere una X sulle risposte corrette):



Dominio:	☒ $\mathbb{R}$	☐ $[0,1]$	☐ $(0,1]$	☐ $\mathbb{R}/\{0\}$
Codominio:	☐ $\mathbb{R}$	☐ $[0,1]$	☒ $(0,1]$	☐ $\mathbb{R}/\{\mp 1\}$
Simmetrie:	☒ pari	☐ dispari		☐ nessuna
Continua:	☒ in $\mathbb{R}$	☐ in $\mathbb{R}/\{0\}$	☐ in $\mathbb{R}/\{0,1\}$	
Proprietà:	☒ limitata	☐ illimitata	☐ limitata sup.	☐ limitata inf.
Dotata di:	☐ nulla	☒ max	☐ min	☒ asintoto/i orizzontale/i
	☐ asintoto/i obliquo/i	☐ asintoto/i verticale/i		

3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{x^2}}{x^2}$$

$\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{x^2}}{x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-2xe^{x^2}}{2x} = -\lim_{x\to 0} e^{x^2} = -1$

Riportare solo i passaggi essenziali

4) Determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua nel dominio indicato

$$f(x) = \begin{cases} a^2x^2 & \text{per } x \geq 1 \\ ax & \text{per } x < 1 \end{cases}$$

$f(1) = a^2$; $\lim_{x \to 1^-} ax = a = a^2 \Rightarrow a^2 - a = 0 \Rightarrow a(a-1) = 0$

Quindi se $a = 0$ oppure $a = 1$ la funzione risulta continua in tutti i reali

5) Liberare il valore assoluto della seguente equazione:

$$f(x) = |x| + |x-1|$$

$C.E. x \in \mathbb{R}$; Poiché $|x|$ è facilmente liberabile e $|x-1| = \begin{cases} x-1 \text{ per } x \geq 1 \\ 1-x \text{ per } x < 1 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} -x+1-x & \text{se } x < 0 \\ x+1-x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ x+x+1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 2x+1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

6) Risolvere la seguente equazione esponenziale/logaritmica:

$$e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$$

Poniamo $t = e^x \Rightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 25 - 24 = 1 \Rightarrow t = \dfrac{5 \mp 1}{2} =< \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}$ da cui si ottiene

$e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2$; $\quad e^x = 3 \Rightarrow x = \ln 3$

<u>Riportare solo i passaggi essenziali</u>

7) Trovare e classificare i punti critici della seguente funzione in $x \in (0, +\infty)$:

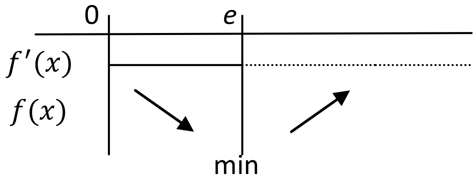
$$f(x) = x\ln(x)$$

$f'(x) = \ln(x) + \frac{x}{x} = \ln(x) + 1 \geq 0$ se $\ln(x) \geq 1 \Rightarrow x \geq e \Rightarrow$

$x \geq 0$

$2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$

otteniamo che



ossia $x = e$ è punto di minimo relativo

8) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Rolle alla funzione

$$f(x) = -x^2 + 6x$$

nell'intervallo $[2, 4]$

Considerando l'intervallo $[2, 4]$, si noti che $f(x)$ è in esso sicuramente continua

con $f(2) = 8 = f(4)$

$f'(x) = -2x + 6$ evidentemente derivabile in (2,4),

applico Rolle

$-2x + 6 = 0 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$

9) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 - R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ da cui si ottiene } \begin{cases} x + y = 0 \\ -y + z = 0 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ con soluzione } (-z, z, z), z \in \mathbb{R}$$

10) Trovare, se esiste, la matrice inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-R_2]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e quindi } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

11) Risolvere la seguente equazione matriciale:

$$3(X + C) - 2(X + B + A) - (C - B) = \underline{0} \qquad con\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3X + 3C - 2X - 2B - 2A - C + B = \underline{0} \Rightarrow X = 2A + B - 2C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2-2 & 2+2-4 \\ 4+3-2 & 4+3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

12) Individuare il valore del parametro *h* affinché la matrice abbia determinante non nullo:

$$\begin{pmatrix} 1 & h & 1 \\ h & 1 & h \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & h & 1 \\ h & 1 & h \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + h^2 + h - 1 - h - 0 = h^2 - 1 = 0 \Rightarrow (h-1)(h+1) = 0 \Rightarrow h = < \begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix}$$

Se $h \neq 1$ o $h \neq -1$ la matrice è non singolare

Riportare solo i passaggi essenziali